

ОБЩІЯ ЗАДАЧЬ  
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. КИСЕЛЕВА.

(На построение).

---

Составилъ

[ студ. техн. В. И. Храбровицкій.

---

(Доказательства теоремъ, геометрическія мѣста и задачи на построение)



П. И. БОНАДУРЕВЪ,  
влад. Южно-Русск. Книгоиздательства Ф. А. Юганс  
КІЕВЪ—ПЕТРОГРАДЪ—ОДЕССА.  
1915.

# П. И. БОНАДУРЕРЪ

влад. Южно-Русск. К-ва Ф. А. Иогансонъ.

В НЫЙ СКЛАДЪ: Кіевъ, Татарская ул. д. № 35/37

## СОБРАНИЯ СОЧИНЕНИЙ.

Полное собрание сочинений А. С. Пушкина, богато иллюстр., подъ редак. и съ историко-литер. коммент. къ пьесам, прозам., пояснит. примѣч. къ текстѣ и вступ. статьей Г. В. Александровскаго (автора «Чтеній по новейшей русской литературѣ»). Въ перепл. Ц. 3 р.

Учен. Комит. М. Н. П. допущенъ въ ученич. библ.

Полное собрание сочинений Н. В. Гоголя, богато иллюстр., подъ ред. и съ ист. лит. ком. къ вѣщ. произ., поясн. прим. къ текстѣ и вступ. статьей Г. В. Александровскаго Въ перепл. Ц. 3 р.

Полное собрание сочинений М. Ю. Лермонтова, богато иллюстрировано., съ вступительной статьей профессора Арабикова, пробѣренное по Академическому изданію. Въ пер. 2 р. 50 к.

В. Г. Вѣликанскій, 4 больш. тома. Ц. 3 р.  
Г. Ф. Квятка-Осиповиченко, въ 2-хъ томахъ 1 р. 35 к.

Т. Шевченко, Полный Кобзарь, въ редакціи Доманицкаго, съ илл., съ матер. по политич. дѣлу. Ц. 85 к. Въ папкѣ 1 р. 10 к. Въ переплѣтѣ Ц. 1 р. 35 к. На лучшей бумагѣ. Ц. 1 р. 25 к. Въ папкѣ 1 р. 50 к. Въ переплѣтѣ Ц. 2 р.

Н. А. Крыловъ. Полное собр. басенъ Ц. 35 к. Въ папкѣ Ц. 50 к. На лучш. бум., въ роскош. пер. Ц. 1 р. Миниатюрн. издан. Ц. 15 к.

Учен. Комит. М. Н. П. допущенъ въ ученич. библ.

## КОЛЛЕКЦИЯ КАРМАННЫХЪ СЛОВАРЕЙ въ конюшковыя переплетѣхъ.

- 1) Французско-Русскій карманный словарь. Составилъ Е. Яковлевъ. Одобрень Ученымъ Комитетомъ. Ц. 75 к.

- 2) Нѣмецко-Русскій карманный с. Одобрень Ученымъ Комитетомъ Л. Д. Фоптъ-Циглеръ. Ц. 75 к.

- 3) Англійско-русскій карманный с. Одобрень Ученымъ Комитетомъ. виль Э. Гоквигъ. Ц. 75 к.

- 4) Латинско-русскій карманный с. Состав. Олимпидъ. Одобрень Ученымъ Комитетомъ. Ц. 75 к.

- 5) Русско-латинскій словарь. Мал. та. Въ перепл. Ц. 45 к.

- 6) Русско-французскій карман. с. Составилъ П. Г. Сиваковъ. Одобрень Ученымъ Комитетомъ. Ц. 75 к.

- 7) Русско-нѣмецкій карманный сл. Составилъ Лоповонокъ. Одобрень Ученымъ Комитетомъ. Ц. 75 к.

- 8) Русско-англійскій карманный сл. Сост. Д. Сеславинъ. Одобрень Комитетомъ. Ц. 75 к.

- 9) Словарь иностранныхъ словъ. С. Н. Гавкичъ. Ц. 85 к.

- 10) Итальянско-русскій карманный сл. Ц. 1 р.

Безъ переплѣтовъ на 16 коп. дешевле

- 11) Словарь иностранныхъ писателей портретами биографіями и критик. извѣд. Въ 2-хъ томахъ. Ц. 1 р. 50 к.

- 12) Д. Н. Сеславинъ. Карманная энципедія и словотолкователь по разнымъ источникамъ, безъ пер. Ц.

## КОЛЛЕКЦИЯ МИНИАТЮРНЫХЪ ВАРЕВЪ «ЛИЛИПУГЪ»

Нѣмецко-русскій, русско-нѣм. франц.-русскій, русско-франц. по 2 Латинско-русск., русско-лат., русско-чешск., греческо-русскій по 45 к.

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ

А. КИСЕЛЕВА.  
(На построение)

---

Составилъ  
студ. техн. В. И. Храбровицкій.

---

Доказательства теоремъ, геометрическихъ задачъ  
(на построение).

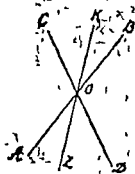


П. И. БОНАДУРЕРЪ,  
влад. Южно-Русск. Книгоиздательства Ф. А. Иогансонъ.  
КИЕВЪ — ПЕТРОГРАДЪ — ОДЕССА.  
1915.

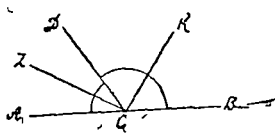
1. Пусть  $OK$  и  $OZ$  суть биссектрисы; требуется, что  $KOZ$  есть прямая линия.  $\angle COB + \angle BOD = 2d$ , как смежные, а  $\angle KOC = \angle DOZ$ , как половины вертикальных углов, слѣд., вмѣсто  $\angle COB$  можно вставить:  $\angle COK + \angle KOB = \angle DOZ + \angle KOB$ , и равенство 1-е обратится въ:  $\angle DOZ + \angle KOB + \angle BOD = 2d$ , значить, на основаніи обратной теоремы о смежных углах  $KO$  и  $OZ$  составляютъ прямую линию.

2. Пусть  $CK$  и  $CZ$  будутъ биссектрисами смежныхъ угловъ  $ACD$  и  $DCB$ ; требуется доказать, что  $ZCK = d$ ; уголъ  $ZCK$  состоитъ изъ двухъ угловъ  $ZCD$  и  $DCK$ , которые  $=$  половинѣ смежныхъ угловъ, и въ совокупности составляютъ полусумму смежныхъ угловъ, т. е.  $= \frac{2d}{2} = d$ .

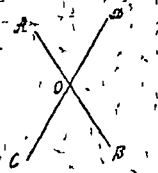
3. По условію  $\angle AOD = \angle BOC$ ;  $\angle AOD + \angle DOB = 2d$ , какъ смежные, подставимъ въ это равенство, вмѣсто  $\angle AOD = \angle BOC$ , получимъ  $\angle BOC + \angle DOB = 2d$ , что на основаніи обратной теоремы о смежныхъ углахъ доказываетъ теорему.



зад. 1.



зад. 2.



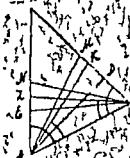
зад. 3.

4. По условію:  $\angle AOC = \angle DOB$  (см. предыдущ. чертежъ) и  $\angle AOD = \angle COB$ ;  $\angle AOD + \angle DOB + \angle COB + \angle AOC = 2\angle AOD + 2\angle DOB = d$ , какъ сумма угловъ вокругъ одной точки; слѣд., сокративъ последнее равенство на 2, получимъ:  $\angle AOD + \angle DOB = \frac{d}{2}$ , что на основаніи обратной теоремы о смежныхъ углахъ доказываетъ, что  $AO$  есть продолженіе  $OB$ .

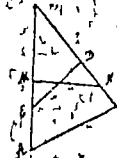
5. 1)  $AM$  и  $AN$  — медианы; в  $\triangle AMC$  и  $\triangle ANC$  есть общая сторона  $AC$ ,  $\angle ACM = \angle CAN$ , как углы при основании равнобедренного  $\triangle ABC$ , стороны  $MC$  и  $NA$  равны, как половины равных боковых сторон, итак  $\triangle AMC \cong \triangle ANC$ , равны следы  $AM = CN$ ; 2)  $AK$  и  $CZ$  — биссектрисы:  $\triangle AKC = \triangle AZC$  ( $AC$  — общая,  $\angle ACK = \angle CAZ$ , по упомянутому и  $\angle KAC = \angle ZCA$ , как половины равных углов), из равенства  $\triangle$ -ов следует, что  $AK = CZ$ ; 3)  $AD$  и  $CE$  — высоты,  $\triangle ADC = \triangle AEC$ , как прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и острый угол  $\angle DCA = \angle CAE$ ; значит  $AD = CE$ .

6.  $DE \perp BC$ ,  $MN \perp AB$ ,  $AM = MB$ ,  $BD = DC$  по условию,  $MN = DE$ ?  $\triangle BDE \cong \triangle BMN$  (катеты  $BD$  и  $BM$  равны, как половины равных боковых сторон равнобедренного  $\triangle ABC$ ,  $\angle B$  — общий след,  $DE = MN$ ).

7. Согласно условию  $AZ = AK$ ,  $KM \perp AC$  и  $MZ \perp AB$ ; требуется доказать, что  $\angle CAM = \angle BAM$ ?  $\triangle$ -ки  $AKM$  и  $AZM$  имеют общую гипотенузу  $AM$  и катет  $AK = AZ$ , значит  $\triangle$ -ки равны  $\angle KAM = \angle MAZ$ .



зад. 5



зад. 6



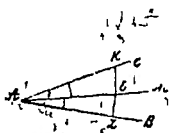
зад. 7

8. По условию  $\angle 1 = \angle 2$ , и  $KZ \perp AM$ ; значит  $\triangle$ -ки  $AKE = \triangle AEZ$  по общему катету  $AE$  и по равному острому углу, след  $AK = AZ$ .

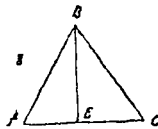
9. По условию  $AE = EC$ , требуется доказать, что  $BE < \frac{AB + BC + CA}{2}$ . Из  $\triangle$ -ка  $ABE$  имеем:  $BE < AB + AE$ , и из  $\triangle$ -ка  $BEC$ ,  $BE < BC + CE$  складывая почленно эти два неравенства, получим:  $2BE < AB + AE + BC + CE$  или  $2BE < AB + BC + AC$ , откуда  $BE < \frac{AB + BC + CA}{2}$ .

10. Четыреугольник  $ABCD$  есть параллелограмм, так как диагонали  $AC$  и  $BD$  делятся пополам в точке  $E$  ( $AE = EC$  по

условия  $BE=ED$  по построению): из  $\triangle$ -ка  $DBC$  имеем  $BD < \frac{BC+CD}{2}$  (или  $2BE < BC+AB$  (т. е.  $CD=AB$ , какъ противоположные стороны паралл-грама) откуда получимъ  $BE < \frac{AB+BC}{2}$



зад. 8

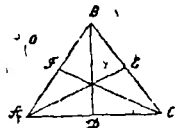


зад. 9.

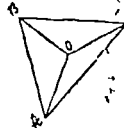


зад. 10

10а. Согласно предыдущей теоремъ  $BD < \frac{AB+BC}{2}$ ,  $AE < \frac{AB+AC}{2}$ ,  $CF < \frac{CB+CA}{2}$ , складывая эти три неравенства, получимъ:  $AE+BD+CF < \frac{2AB+2BC+2AC}{2}$ , откуда  $AE+BD+CF < AB+BC+AC$ ; чтобы доказать вторую половину теоремы, мы рассмотрим  $\triangle$ -ки:  $ABD$ ,  $BCF$ ,  $AEC$ , изъ которыхъ имеемъ:  $BD > BC-CD$ ,  $AE > AB-BE$ ,  $CF > AC-AF$ , складывая почленно, получимъ:  $BD+AE+CF > BC-CD+AB-BE+AC-AF$ ; или  $BD+AE+CF > AB+BC+AC - \frac{AB}{2} - \frac{BC}{2} - \frac{AC}{2}$ , или:  $BD+AE+CF > \frac{AB+BC+AC}{2}$ .



зад. 10а

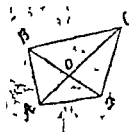


зад. 11.

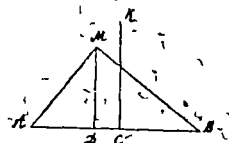
11.  $AO+OB+OC < AB+BC+AC$ ? Зная что объемлемая до-  
мавая меньше объемлющей, мы можем написать  $AO+OC < AB+BC$ ,  $AO+OB < AC+CB$ ,  $OB+OC < AC+AB$ , складывая почленно эти неравенства, получимъ:  $2(AO+OB+OC) < 2(AB+BC+AC)$ , откуда имеемъ:  $AO+OB+OC < AB+BC+AC$ ; кроме того, надо доказать:  $AO+OB+OC > \frac{AB+BC+AC}{2}$ , изъ  $\triangle$ -овъ  $AOB$ ,  $BOC$  и  $AOC$

имеем:  $AO + OC > AC$ ,  $AO + OB > AB$ ,  $BO + OC > BC$ ; складывая почленно, получим:  $2(AO + OC + OB) > AB + AC + BC$ , сократить на 2, получим:  $AO + OC + OB > \frac{AB + AC + BC}{2}$ .

11а.  $AC + BD < AB + BC + CD + DA$ ? Изв.  $\triangle$ -овъ  $ABD$  и  $BDC$  имеем:  $BD < AB + AD$ ,  $BD < BC + CD$ , складывая получим:  $2BD < AB + AD + BC + CD$ ; точно такъ же изъ  $\triangle$ -овъ  $ABC$  и  $ADC$  получим:  $2AC < AB + BC + CD + DA$ ; складывая это неравенство съ прежнимъ, получимъ:  $2BD + 2AC < 2(AB + BC + CD + DA)$  откуда имеемъ:  $BD + AC < AB + BC + CD + DA$ ; кроме того, надо доказать, что  $AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$ ; изъ  $\triangle$ -овъ  $AOD$ ,  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  имеемъ:  $AO + OD > AD$ ,  $AO + OB > AB$ ,  $BO + OC > BC$ ,  $CO + OD > DC$ , складывая почленно получимъ:  $2(AO + OB + OC + OD) > AD + AB + BC + DC$ ; откуда имеемъ:  $2(AC + BD) > AD + AB + BC + DC$ , или  $AC + BD > \frac{AD + AB + BC + DC}{2}$ .



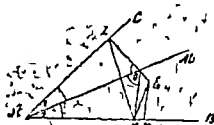
зад. 11.



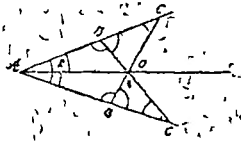
зад. 11а.

12. Точка  $M$  не лежит на перпендикулярѣ къ среднѣмъ  $AB$  (этотъ перп-яръ есть линия  $KC$ ), следовательно, если черезъ точку  $M$  провести  $MD \perp$  къ отрезку  $AB$ , то  $AD < DB$  и наклонная  $MA$ ; какъ менѣе удаленная отъ перпендикуляра  $MD$ ,  $< MB$ .

13. Задано точка  $E$ , лежащая внѣ биссектрисы  $AM$ ;  $EK \perp AB$ ,  $EZ \perp AC$ ; нужно доказать, что,  $EZ > EK$ ; изъ пересѣченія  $ZE$  съ биссектрисой, точки  $O$ , проводимъ перпендикуляръ  $ON$  къ  $AB$ ; соединяемъ  $Z$  съ  $N$  и получаемъ  $\triangle$ -къ  $OZN$  равнобедренный, т. е.  $OZ = ON$ ;  $MA$  будетъ служить  $\perp$  къ среднѣмъ  $ZN$ ; точка  $E$  не лежитъ на этомъ  $\perp$  (доказательство, что биссектриса  $MA \perp ZN$  въ среднѣмъ  $\triangle$ -ки  $AOZ$  и  $AON$  равны по гипотенузѣ  $AO$  и  $\angle 1 = \angle 2$ , слѣд.  $\angle ZO A = \angle NO A$  и линия  $MA$  есть биссектриса равнобедреннаго  $\triangle$ -ка  $ZON$ , слѣд.  $MA \perp ZN$  въ среднѣмъ). значитъ на основаніи предыдущей теоремы  $EZ > EN$ , а такъ какъ  $EN > EK$ , такъ наклонная по отношенію къ  $\perp$ , то  $EZ > EK$ .



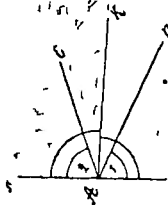
зад. 13



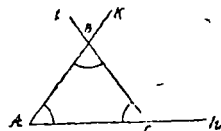
зад. 13а

13а. По условию  $AB_1=AB$ ,  $AC_1=AC$ ; вычтя первое равенство из второго, получим:  $AC_1-AB_1=AC-AB$  или  $B_1C_1=BC$ ;  $\triangle AB_1C=\triangle AC_1B$  (общ.  $\angle A$  и по двѣ равныя заключающія стороны); слѣд.,  $\angle C_1=C$ ; далѣе  $\angle AB_1C=\angle BC_1$  (изъ равенства тѣхъ же  $\triangle$ -овъ  $AB_1C$  и  $AC_1B$ );  $\angle CB_1C_1=\angle C_1BC$  какъ дополненія до 2d равныхъ угловъ;  $\triangle OB_1C_1=\triangle OBC$  ( $BC=B_1C_1$  и два прилежащихъ угла); слѣд.,  $OB=OB_1$  и  $\triangle AOB=\triangle AOB_1$  ( $AO$  общая сторона,  $AB=AB_1$  и  $OB=OB_1$ ); слѣд.,  $\angle 1=\angle 2$  и линия  $AO$ , проведенная, чрезъ пресѣченіе  $BC_1$  и  $B_1C$ , есть биссектриса  $\angle A$ .

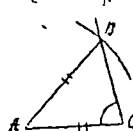
18. По условию  $\angle 1=\angle 2$ ; возставлемъ въ точкѣ  $I$  къ  $NM$ ;  $\angle NAK=\angle MAK=d$ , вычтя изъ второго первое равенство, получимъ  $\angle NAK-\angle 2=\angle MAK-\angle 1$ , или  $\angle CAK=\angle BAK$ , т. е.  $KA$  есть биссектриса  $\angle BAC$ ; теперь ясно построение: нужно провести биссектрису  $\angle BAC$  и провести  $NM \perp AK$ , тогда  $\angle 1=\angle 2$ .



зад. 18



зад 19 а).



зад. 19 с).

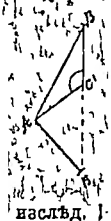
19. а) Даны:  $AC$ ,  $AB$  и  $\angle A$ ; построить  $\triangle$ ; откладываемъ на произвольной прямой  $AN$  линію, равную  $AC$  и при точкѣ  $A$  строимъ  $\angle = \angle A$ , потомъ на линіи  $AK$  откладываемъ отръзокъ = стороне  $AB$  и точку  $B$  соединимъ съ  $C$ , получимъ искомый  $\triangle$ ; б) даны: сторона  $AC$ ,  $\angle A$  и  $C$ , построить  $\triangle$ ; откладываемъ на  $AN$  отръзокъ  $= AC$ , при точкахъ  $A$  и  $B$  строимъ данные  $\angle A$  и въ пресѣченіи  $AK$   $CZ$  получимъ третью величину  $B$ ; в) Даны:  $AC$ ,  $AB$  и  $\angle C$  (т. е.  $AB > AC$ ); откладываемъ  $AC$  тропимъ  $\angle C$  при



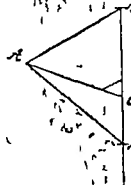
точки  $C$ , проводимъ изъ точки  $A$  дугу радиусомъ, равнымъ боковой сторонѣ  $AB$  и находимъ въ пересѣченіи точку  $C$ .  
 Исследование. I. Уголъ  $C$  — тупой. Такъ какъ дуга, проведенная изъ точки  $A$  радиусомъ, равнымъ  $AB$  пересѣчетъ линію  $BC$  и ея продолженіе въ двухъ точкахъ  $B$  и  $B_1$ , то получится два треугольника:  $ABC$  и  $ACB_1$ , изъ которыхъ второй не соответствуетъ условию ( $\angle ACB_1$  — острый); въ этомъ случаѣ — одно рѣшеніе.

II. Уголъ  $C$  — острый. Въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться изъ чертежа, имѣемъ опять таки одно рѣшеніе, т. к.  $\triangle ACB_1$  не соответствуетъ условию ( $\angle ACB_1$  — тупой).

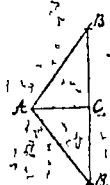
III. Уголъ  $C$  — прямой; въ этомъ случаѣ имѣемъ два рѣшенія, т. к.  $\triangle ABC$  и  $\triangle AB_1C$  удовлетворяютъ одновременно условию ( $\angle ACB$  и  $\angle ACB_1$  каждый въ отдельности  $= d$ ).



наслѣд. I



наслѣд. II



наслѣд. III

20. а) Откладываемъ отрезокъ, равный основанію  $AC$ , затѣмъ изъ точки  $A$  радиусомъ, равнымъ боковой сторонѣ  $AB$  делаемъ дужку, изъ точки  $C$  тѣмъ же радиусомъ проводимъ дугу, и въ пересѣченіи дугъ находимъ вершину  $B$ .

б) Откладываемъ сначала отрезокъ, равный основанію  $AC$ , затѣмъ при точкахъ  $A$  и  $C$  строимъ  $\angle A$  и  $\angle C$ , равные заданному по условию и въ пересѣченіи двухъ линій  $AB$  и  $CB$  находимъ вершину  $B$ .

в) Здѣсь приходится строить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

г) Здѣсь приходится строить по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ, что уже извѣстно.

21. а) Такъ какъ  $\angle$  между катетами  $= d$ , то задача сводится къ построенію  $\triangle$ -ка по двумъ сторонамъ и углу между ними.

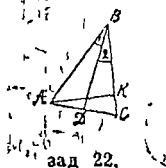
б) Уголъ  $\angle d$  между катетами извѣстенъ; слѣд., задача сводится къ построенію  $\triangle$ -ка по двумъ сторонамъ и углу противъ большей изъ нихъ, см. № 19; здѣсь два рѣшенія.

Если  $\angle d$  известен, то задача сводится к построению  $\triangle$  на по сторонам и двум прилежащим  $\angle$ .

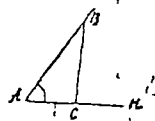
22. а) Биссектриса  $BD$  делит равнобед.  $\triangle$  на 2 равных прямоугольных  $\triangle$ -на:  $ABD$  и  $DBC$ , зная высоту  $BD$  и боковую сторону  $AB$  легко построить на основании № 21 в)  $\triangle ABD$  и по-  
том из точки  $B$  радиусом, равным  $BC$  пересечь основание  $AC$ .

б)  $\triangle ABD$  легко построить на основании № 21 с), т. к.  $\angle B$  известен, кроме того  $\angle ADB = d$  и  $BD$  дана.

в)  $\angle AKC$  ( $AK \perp BC$ ) легко построить на основании № 21 б),  $AC$  и  $AK$  даются по условию; далее, чтобы получить искомый  $\triangle ABC$ , надо продолжить  $CK$  до пересечения с  $BD$ , перпендику-  
ляром к  $AC$ , и на пересечении найдем точку  $B$ , которую соединим с  $A$ .



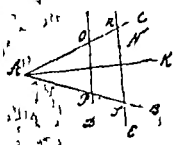
зад. 22.



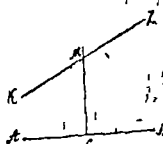
зад. 23.

23. Проводим бесконечную линию  $AH$ , при точке  $A$  строим  $\angle CAB$ , равный данному, затем на стороне этого угла  $AB$  откла-  
дываем отрезок, равный гипотенузе и из конца его  $B$  опуска-  
ем  $BC \perp AH$ , получим  $\triangle ABC$  искомый.

24. Через точку  $M$  (вне угла  $BAC$ ) или через точку  $N$  (внутри  $\angle BAC$ ) проведем линии  $MD$  или  $NE$  так, что  $AO = AP$  и  $AR = AS$ ;  $\triangle AOP$  и  $ARS$  равнобедренны таким образом, проведем  $AK$  биссектрису  $\angle BAC$ ; она  $\perp OP$  и  $\perp RS$  (по свой-  
ству биссектр. равнобед.  $\triangle$ -на), откуда вытекает построение  
линий  $MD$  и  $NE$ , проводим биссектрису  $\angle BAC$ , это будет  $AK$ ;  
затем через точки  $M$  и  $N$  проводим  $MD \perp AK$  и  $NE \perp AK$ ,  
тогда  $AO = AP$  и  $AR = AS$ .



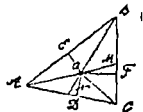
зад. 24.



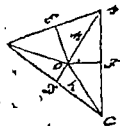
зад. 27.

27. Для нахождения искомой точки соединимъ А и В, середины отрезка АВ возставимъ  $\perp$  СМ до пересѣченія съ прямой КZ (данной); точка М будетъ искомая, такъ какъ она лежитъ на прямой КZ и на  $\perp$  къ серединѣ АВ; точно такое же построение будетъ и тогда, когда точки А и В находятся по обѣ стороны прямой КZ.

30. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ отъ сторонъ АС и АВ, будетъ биссектриса  $\angle$  САВ, т. е. линия АМ; точно такъ же говоримъ, что искомая точка должна лежать на биссектрисѣ  $\angle$  АВС, т. е. линіи ВN; искомая точка, находясь одновременно на АМ и ВN, будетъ лежать въ пересѣченіи ихъ: будетъ точка О, теперь докажемъ, что точка О будетъ также равноудалена отъ сторонъ СВ и СА  $\angle$  ВСА, для доказательства опустимъ изъ точки О перпендикуляры на всѣ стороны: ОЕ, ОF, ОD и докажемъ что  $OD=OF$ , известно, что  $OD=OE$  и  $OE=OF$ , отсюда ясно, что  $OD=OF$ .



зад 30



зад 8

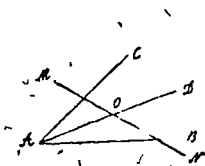
28. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ отъ двухъ точекъ А и С будетъ  $DM \perp AC$  въ серединѣ стороны АС на лин. DM должна находиться искомая точка; кромѣ того, она должна находиться на равномъ разстояніи отъ точекъ А и В; слѣд. она должна лежать на  $EK \perp AB$  въ ея серединѣ Е; значить, искомая точка, находясь одновременно на DM и EK, будетъ лежать въ ихъ пересѣченіи, это будетъ точка О; она будетъ равноудалена отъ точекъ А, В и С.

29. Искомая точка будетъ находиться на пересѣченіи биссектрисы  $\angle$  ВАС, т. е. линіи AD съ данной линіей MN; это будетъ точка О, т. е. по свойству биссектрисы она находится на равномъ разстояніи отъ сторонъ  $\angle$  ВАС.

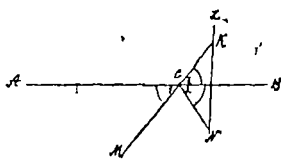
30. Рѣшеніе см. раньше послѣ № 27.

31. Положимъ, искомая точка С найдена; опустимъ изъ точки N (данной по условію)  $NZ \perp AB$  и продолжимъ MC до пересѣче-

ния въ точкѣ К, тогда по свойству точки С  $\angle 1 = \angle 2$ , и  $\angle 1 = \angle 3$  по свойству вертикальных угловъ; отсюда  $\angle 3 = \angle 2$  и  $\Delta$ -ки  $CKD$  и  $CND$  (прямоугольные) будутъ равны (общій катетъ  $CD$  и равные острые углы:  $\angle 3 = \angle 2$ ), отсюда слѣдуетъ, что  $KD = DN$ ; теперь построение ясно: надо изъ точки  $N$  опустить  $NZ \perp AB$ , отложить  $DK = DN$  и точка  $K$  соединяетъ прямой линіей съ данной другой точкой  $M$ ; на пересѣченіи  $KM$  съ  $AB$  будетъ лежать искома точка  $C$ ; если мы теперь соединимъ  $C$  съ  $N$ , то  $\angle 1 = \angle 2$ .

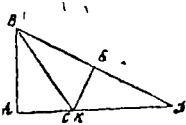


зад 29

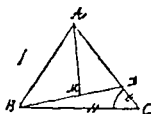


зад 31.

32. Строимъ сначала прямоугольный  $\Delta ABD$ , одинъ катетъ котораго  $=$  данному катету  $AB$ , а другой  $AD =$  суммѣ гипотенузы и катета искомага  $\Delta$ -ка; затѣмъ изъ точки  $E$ , середины гипотенузы  $BD$  построеннаго  $\Delta$ -ка  $ABD$  проводимъ  $EK \perp BD$ , и въ пересѣченіи съ  $AD$  находимъ точку  $C$ ;  $ABC$  будетъ искомымъ  $\Delta$ -къ, такъ какъ  $BC = CD$ , и  $AC + BC = AC + CD =$  заданной суммѣ.



зад 32



зад 33

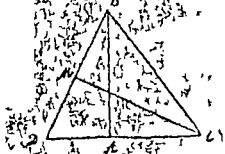


33. I.  $AC > AB$ , отсюда:  $\angle B > \angle C$ ; дано: основание  $BC$ , разность  $AC - AB = DC$  и  $\angle C$  менѣе чѣмъ  $\angle B$ ; для построения отъ точки  $C$  откладываемъ на сторонѣ  $AC$  (большей) отрезокъ  $DC$ , равный разности боковыхъ сторонъ; т. е. опредѣляется  $\Delta BDC$  (по двумъ сторонамъ и углу  $C$  между ними); построивъ  $\Delta BDC$  по даннымъ изъ условия, мы изъ точки  $M$ , середины стороны  $BD$ , проводимъ  $MA \perp BD$  и въ пересѣченіи этого перпендикуляра съ продолженіемъ  $DC$  находимъ точку  $A$ , которую соединимъ съ  $B$  и получимъ искомый  $\Delta ABC$  (по свойству  $MA \perp$  въ серединѣ  $BD$   $AB = AD$  и  $AC - AB = DC$  удовлетворяетъ условию).

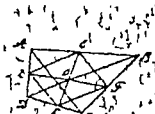
III.  $AB > AC$  и  $\angle C > \angle B$ , для построения продолжим вниз и отложим  $AB - AC = CD =$  данной разности; тогда получится  $\triangle BCD$  (въ немъ, известно: основание  $BC$ ,  $\angle BCD = 180^\circ - \angle C$  и  $CD =$  данной разности  $= AB - AC$ ); построивъ  $\triangle BCD$ , изъ точки  $M$  — середины стороны  $BD$ , проводимъ  $MA \perp BD$  и пересѣченіемъ съ продолженіемъ  $CD$  находимъ точку  $A$ , которую соединимъ съ  $B$  и получимъ искомый  $\triangle ABC$  (по свойству  $MA \perp BD$  въ ея срединѣ  $AB = AD$  и  $AB + AC = DC =$  данной разности).

34. Сначала строимъ прямоугольный  $\triangle DBA$ , одинъ катетъ котораго  $AB =$  данному, а  $AD =$  разности между гипотенузой и катетомъ искомаго  $\triangle$ -ка, чтобы отъ  $\triangle$ -ка  $ABD$  перейти къ искомому, въ срединѣ  $M$  проводимъ  $MC \perp BD$  и на пересѣченіи продолженіемъ катета  $DA$  находимъ искомую точку  $C$ ;  $\triangle ABC$  удовлетворяетъ условію.  $AB =$  данному катету, кромѣ того  $BC = AC =$  данной разности  $DA$ , потому что по свойству  $MC$  (перпендикъ къ срединѣ  $BD$ )  $BC = CD$ , а  $DC - AC = AD$ , слѣд.  $BC - AC = AD$ .

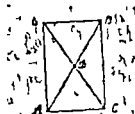
37. Пусть  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $BC$  и т. д., проведемъ діагональ  $BD$ ; рассмотримъ  $\triangle$ -ки  $ABD$  и  $BCD$ ; линии  $EZ$  и  $KF$  соединяющія середины боковыхъ сторонъ въ этихъ  $\triangle$ -кахъ (считая  $BD$  за общее основание этихъ  $\triangle$ -овъ) будутъ  $\parallel$  основанию и равны его половинѣ, слѣд. линии  $EZ \parallel KF$ , а потому и  $EF \parallel ZK$ ; фигура  $EFKZ$  есть параллелограмъ.



зад. 34



зад. 37.



зад. 38

38. Даны прямоугольный  $\triangle ABC$  и его медіана  $CD$ , слѣд.  $BD = DA$ , продолжимъ  $CD$  и отложимъ  $DE = DC$ ; соединивъ  $E$  съ  $B$  и  $A$ , получимъ прямоугольникъ  $EBCA$ , (такъ какъ діагонали  $EC$  и  $BA$  дѣлятся пополамъ и  $\angle C = 90^\circ$ ); отсюда слѣдуетъ, что  $EC = AB$  и  $EC = \frac{AB}{2}$ , т. е.  $DC = \frac{AB}{2}$ .

39. Давъ  $\triangle ABC$ , въ которомъ медіана  $DC = \frac{AB}{2} = AD$ , продолжимъ  $DC$  и отложимъ  $DE = DC$ , соединимъ теперь  $E$  съ  $B$  и  $A$ .

получить  $\square AEBC$ , который есть прямоугольник, т. к. давая  
 и того  $EC$  и  $AB$  равны (из условия имеем:  $2DC = EC = 2 \cdot \frac{AB}{2} =$   
 $= AB$ ), и делится пополам в точке  $D$ ; след.  $\angle C = d$ .  
 40.  $CD \perp AB$  и  $AC = BE$ ;  $\angle DCE = \angle A - \angle B$ . Заметим, что  
 $\angle A = \angle BCD$ , как углы с перпендикулярными сторонами ( $AC \perp BC$   
 и  $CD \perp AB$ ); кроме того,  $\angle B = \angle DCA$  по той же причине ( $BC \perp AC$   
 и  $DC \perp BA$ ); на основании № 38  $\triangle BCE$  — равнобедренный и, сле-  
 дов.,  $\angle B = \angle BCE$ , отсюда вытекает, что  $\angle DCE = \angle DCB - \angle BCE$   
 или (т. к.  $\angle BCE = \angle B = \angle DCA$ )  $\angle DCE = \angle DCB - \angle DCA$ , или  
 (т. к.  $\angle DCB$  по доказанному  $= \angle A$ )  $\angle DCE = \angle A - \angle B$ .



зад. 39.



зад. 40.



зад. 41.

41. Дать прямоугольный  $\triangle ABC$ , в котором  $\angle B = \frac{1}{3}d$ ,  
 требуется доказать, что  $AC = \frac{AB}{2}$ ; для доказательства продолжим  
 $AC$  и отложим  $CD = AC$ , соединим  $D$  с  $B$ , получим  $\triangle CBD =$   
 $= \triangle ABC$  (общий катет  $BC$  и катет  $CD = AC$ ), след.,  $\angle ABC =$   
 $= \angle CBD = \frac{1}{3}d$  и  $\angle ABD = \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}d = \frac{2}{3}d$ , кроме того, в след-  
 ствие равенства  $AB = BD$ ,  $\triangle ABD$  равнобедренный, и  $\angle A = \angle D =$   
 $= (2d - \frac{2}{3}d) : 2 = \frac{2}{3}d$ ; отсюда следует, что  $\triangle ABE$  имеет все  
 углы равные  $\frac{2}{3}d$ , т. е. что он равноугольный и равносторонний;  
 значит,  $AD = BD = AB$ , и  $\frac{AD}{2} = AC = \frac{AB}{2}$ .

42. Из предыдущего чертежа видно, что если  $AC = \frac{AB}{2}$ , то  
 $\angle ABC = \frac{1}{3}d$ ; в самом деле, продолжить  $AC$  и отложить  $CD =$   
 $= AC$ , получим  $\triangle ABC = \triangle BCD$  (см. № 41) и  $BD = 2AC = AD =$   
 $= AB$ , т. е.  $\triangle ABD$  — равносторонний или равноугольный, а потому  
 $\angle A = \angle ABD = \angle D = 2d : 3 = \frac{2}{3}d$ , и  $\angle ABC = \frac{2}{3}d : 2 = \frac{1}{3}d$ .

43.  $ABCD$  есть параллелограмм; диагональ  $MN$  проходит через  
 центр параллелограмма; требуется доказать, что  $MO = ON$ ; для до-

...кстати, можно заметить, что  $\triangle BOM = \triangle NOD$  ( $BO = ON$ , как половины диагонали  $BD$ ;  $\angle MOB = \angle NOD$ , как вертикальные,  $\angle MBO = \angle NDO$ , как внутренние, накрест-лежащие); отсюда следует, что  $MO = ON$ .



зад. 43.

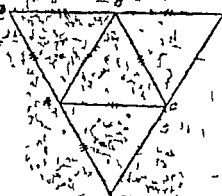


зад. 44.

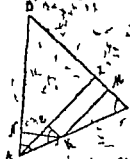
44. Дана линия  $KZ$ ; требуется доказать, что  $KO = OZ$ ; через точку  $O$  проводим  $MN \parallel CD$ ; тогда  $\triangle MOK = \triangle ZON$  (т. е.  $MO = ON$ ,  $OK = OZ$ , как параллельны между параллельными,  $\angle MOK = \angle ZON$ , как вертикальные, и, кроме того,  $\angle KMO = \angle ONZ$ , как внутренние, накрест-лежащие); отсюда следует, что  $KO = OZ$ .

45. Сумма внешних углов всякого многоугольника равна  $4d$ ; если мы допустим, что многоугольник может иметь больше 3-х острых углов, т. е., например, 4 острых угла, то сумма соответствующих им внешних углов будет равна 4-тупым углам, или больше  $4d$ , что противно теореме о внешних углах многоугольника.

46.  $DE \parallel AC$ ,  $FE \parallel AB$  и  $DE \parallel BC$ ; требуется доказать, что  $\triangle FDE = 4 \triangle ABC$  и что  $AC = \frac{DE}{2}$ ,  $AB = \frac{FE}{2}$ ,  $BC = \frac{DF}{2}$ ;  $AC = DB = BE$ , как параллельны между параллельными; слд.  $AC = \frac{DE}{2}$ ; кроме того, по той же причине  $AB = EC = FC = \frac{FE}{2}$  и  $BC = AD = AF = \frac{DF}{2}$ ; отсюда следует, что  $\triangle ADB = \triangle ABC = \triangle BEC = \triangle AEC = \triangle ACF$ , по 3-м равным сторонам и  $\triangle FDE = 4 \triangle ABC$ .



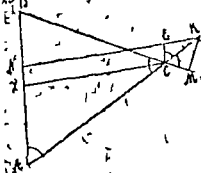
зад. 46.



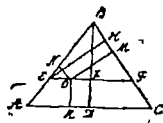
зад. 47.

47.  $KM \perp BC$  и  $KN \perp AB$ ; требуется доказать, что  $KM + KN = AZ$ ; проведем  $KE \perp AZ$ ; тогда  $KM = EZ$  ( $KM \parallel EZ$ , как перпендикуляры к  $BC$ ; кроме того,  $KE \parallel ZM$ , как перпендикуляры к параллельным прямым  $KM$  и  $AZ$ ), как параллельны между параллельными; кроме того, из рассмотрения  $\triangle$ -ов  $AEK$  и  $ANK$ , которые равны, (общая гипотенуза  $AK$ ,  $\angle AKE = \angle ASB$ , как соответственные, и, след., равные острые углы:  $\angle AKE = \angle ASB = \angle SAB$ ) получаем:  $KN = AE$ , след.,  $AZ = AE + EZ = KN + KM$ .

48.  $KM \perp BC$ ,  $KN \perp AB$ ; требуется доказать, что между  $KM$ ,  $KN$  и  $CZ$  (которое  $\perp AB$ ) существует какая-нибудь аналогичная предыдущей, изложенной в № 47, зависимость; проведем  $CE \perp KN$ ; тогда (см. № 47)  $CZ = EN$ ; и из рассмотрения  $\triangle$ -ов  $ECK$  и  $CKM$  (общая гипотенуза  $CK$ , кроме того,  $\angle MCK = \angle ASB = \angle BAC = \angle ECK$ ), которые равны, находим  $KM = KE$ , откуда следует, что  $CZ = EN = KN - KE = KN - KM$ .



зид 48



зид 48а

48а. Взята внутри равностороннего  $\triangle$ -ка  $ABC$  точка  $O$ , проведены  $OK \perp AC$ ,  $ON \perp AB$ ,  $OM \perp BC$ ; требуется доказать, что  $OK + ON + OM = BD$  (высота  $\triangle$ -ка  $ABC$ ); для доказательства через точку  $O$  проводим  $EF \parallel AC$ ; тогда  $OK = ZD$  (как параллельны между параллельными); кроме того, получается  $\triangle EBF$  — равносторонний, т. к. по равенству \*): соответственных и равных этот  $\triangle$  — равноугольный и равносторонний; в этом  $\triangle$ -ку, как им же, потому  $EB = BF$  применяется теорема № 47 и поэтому  $ON + OM = EN$ ; а т. к.  $EN$  по свойству равностороннего  $\triangle$ -ка  $= BZ$ , то  $ON + OM = BZ$ , и  $ON + OM + OK = BZ + OK = BZ + ZD = BD$ .

49. По условию:  $AB = BC = CD = DA$  и  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ ; след., путем вычитания этих равенств получим  $AB - AA_1 = BC - BB_1 = **$  след.,  $\triangle A_1BB_1 = \triangle B_1CC_1 = \triangle C_1DD_1 = \triangle D_1AA_1$  (они равные катеты); откуда следует равенство гипоте-

\*)  $\angle BEF = \angle BAC = \angle BCA = \angle BFC = \angle FBE$   
\*\*)  $= CD - CC_1 = DA - DD_1 = A_1B = B_1C = C_1D = D_1A$



пусть  $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$ ; кроме того,  $\angle A_1A_1D_1 = \angle B_1B_1D_1$   
 т. е. и  $\angle A_1D_1A_1 = \angle B_1D_1B_1$ , и т. д. и  
 $\angle A_1A_1D_1 + \angle B_1A_1B_1 = d$  (какая сумма) ост-  
 углов прямоугольного  $\triangle$ -ка, и  $\angle D_1A_1A_1$   
 $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1D_1 = \angle C_1D_1A_1 = 2d$   
 $= d$ ; значит, фигура  $A_1B_1C_1D_1$  имеет  
 равные стороны и углы, прямые, есть  
 квадрат.



49а. Для доказательства обращаемся к чертежу № 37, 1) параллелограмм  $EFKZ$  есть прямоугольник, то  $EF \perp FK$ , и  $AC \parallel EF$ , то  $AC \perp FK$ , а т. е.  $FK \parallel BD$ , то  $AC \perp BD$ , т. е. диагонали данного четырехугольника  $ABCD$  должны быть перпендикулярны;

2) если  $EFKZ$  есть ромб, то  $ZE = EF$ ; отсюда следует что  $EZ = \frac{BD}{2} = EF = \frac{AC}{2}$  и  $BD = AC$ , т. е. диагонали данного четырехугольника должны быть равны.

3) Т. е. квадрат соединяет в себе свойства прямоугольника и ромба, то в случае, если  $EFKZ$  есть квадрат, то диагонали  $AC$  и  $BD$  должны быть равны и перпендикулярны.

50. Искомое геометрическое место будет линия  $RS$ , проходящая через  $E$ , середину линии  $MN$ , и параллельная линии  $AB$ .

Линия  $RS$  будет делить все линии, исходящие из точки  $M$ ,  $MO$ ,  $MP$ ,  $MQ$  пополам в точках  $F$ ,  $K$ ,  $Z$ ; в этом можно убедиться следующим образом: проводим через точку  $F$   $ab \parallel MN$  и через точку  $M$  линию  $Ma \parallel AB$ ; теперь  $\triangle MFa = \triangle$

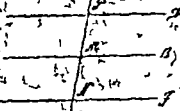
( $Fb = EN = EM = aF$ ,  $\angle bFo = \angle MFa$ , как вертикальные, и  $\angle Ma = \angle Fbo$ , как внутренние накрест-лежащие); отсюда следует,  $MF = FO$ , т. е. что линия  $RS$  делит  $MO$  пополам в точке, точно так же можно доказать, что  $MK = KP$ ,  $MZ = ZO$  и т. д.

51. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от двух параллельных прямых.

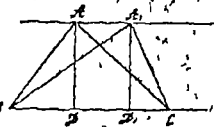
Пусть  $CD$  и  $EF$  будут две параллельные линии. Искомое место будет линия  $AB$ , параллельная этим прямым и проведенная через середину  $M$  общего перпендикуляра  $NP$ .



В самом деле, всякая точка на линии  $AB$  находится в одинаковом расстоянии от параллельных линий, и всякая точка  $AB$  не одинаково отстоит от тех же прямых.



зад. 51



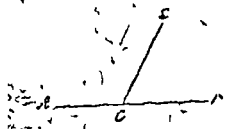
зад. 52

52. Найти геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание и равные высоты.

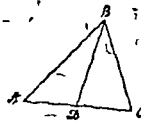
Геометрическое место вершин приходится на прямой  $AA'$ , проведенной через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  параллельно его основанию  $BC$ , ибо очевидно, что у всех треугольников  $ABC$ ,  $A_1BC$ , общее основание  $BC$  и одна и та же высота  $AD$ .

53. Даны два угла треугольника, построить третий.

На прямой  $AB$  при точке  $C$  строим угол  $DCB$ , равный сумме двух данных углов (см. рѣш. зад. №14), тогда дополнительный угол до  $2d$ , т. е.  $\angle DCA$  и будет искомым.



зад. 53.



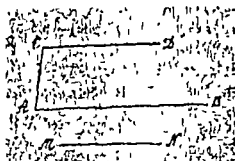
зад. 54.

54. Дань острый угол прямоугольного  $\triangle$ ; построить другой острый угол.

При одной из сторон прямого угла строим данный острый угол, тогда дополнение к нему до прямого угла и будет искомым, другим острым углом.

55. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся от нее на данном расстоянии.

Положим, что дана прямая  $AB$  и требуется провести прямую  $CD$  на расстоянии  $MN$  от  $AB$ . Для этого из точки  $A$  возставляем перпендикуляр, откладываем на нем отрезок  $AC=MN$  и через точку  $C$  проводим  $CD \parallel AB$ .



зад. 55.



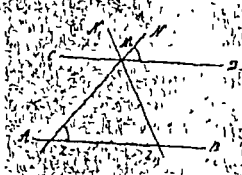
зад. 56.

56. Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеж.

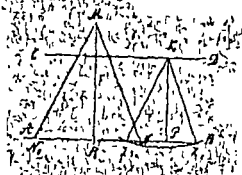
Когда вершина угла, составляемого прямыми  $AB$  и  $CD$ , помещается на чертеж, тогда для проведения прямой, делящей угол пополам, поступаем следующим образом. К прямой  $AB$  проводим какой-нибудь перпендикуляр  $EF$ , а также к прямой  $CD$  к какой-нибудь ее точке  $G$  перпендикуляр к ней  $GH$ . Берем  $EF = GH$  и из точек  $F$  и  $H$  проводим параллельные к  $AB$  и  $CD$ ; пересечения их дадут точку  $M$ , лежащую на искомой линии, потому что расстояние точки  $M$  до сторон угла одинаково. Затем на тех же перпендикулярах берем другие два равных расстояния и определяем другую точку биссектрисы, после чего через полученные две точки проводим и биссектрису.

57. Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.

Положим, дана прямая  $AB$ ; требуется через точку  $M$  провести прямую под углом  $m$  к прямой  $AB$ . Для этого через точку  $M$  проведем прямую  $CD \parallel AB$ , при точке  $M$  построим угол  $\angle NMD$ , равный данному  $\angle m$ , и сторону его  $NM$  продолжим до пересечения с  $AB$  в  $Z$ ; тогда  $\angle NMD = \angle MZB$ , но  $\angle NMB = \angle m$ , следовательно,  $\angle MZB = \angle m$ . Если при точке  $M$  построим  $\angle N_1MC = \angle m$ , то тогда можем провести вторую прямую  $N_1Z$ , которая пересечет прямую  $AB$  под  $\angle MZ_1A = \angle N_1MC = \angle m$ .



зад. 57.



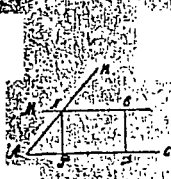
зад. 58.

58. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данной длине.

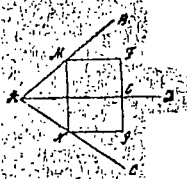
Даны две параллельныя прямыя  $AB$  и  $CD$ , точка  $M$  и длина  $m$ . Чтобы рѣшить данную задачу изъ какой нибудь точки на прямой  $CD$  описываемъ дугу радиусомъ равнымъ данному отрезку  $m$ . Дуга эта пересѣчетъ прямую  $AB$  въ точкахъ  $Z$  и  $Z_1$ ; радиусы  $KZ$  и  $KZ_1$  равны данному отрезку  $m$ . Затѣмъ черезъ точку  $M$  проводимъ  $MN \parallel KZ$  и  $MN_1 \parallel KZ_1$ ; Линіи  $MN$  и  $MN_1$  будутъ искомые. Если  $m > KP$ , то дуга, описанная радиусомъ  $m$ , пересѣчетъ прямую  $AB$  въ двухъ точкахъ  $Z$  и  $Z_1$  и получатся два рѣшенія  $MN$  и  $MN_1$ ; если  $m = KP$ , то дуга, описанная радиусомъ  $m$ , является прямой  $AB$  въ точкѣ  $P$  и тогда получатся одно рѣшеніе  $MN$ ; наконецъ, если  $m < KP$ , то дуга не пересѣчетъ прямой  $AB$  и эта задача невозможна такъ какъ очевидно, что нельзя провести прямой такой, чтобы ея отрезокъ между данными параллельными линіями былъ меньше разстоянія между этими прямыми.

59. Между сторонами даннаго остраго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одной изъ сторонъ угла.

Данъ уголъ  $BAC$ . Для того, чтобы рѣшить эту задачу на прямой  $AC$  даннаго угла возстановляемъ изъ какой нибудь точки перпендикуляръ  $DE$ , равный данной прямой, и черезъ точку  $E$  проводимъ прямую  $ME \parallel AC$ . Черезъ точку пересѣченія  $N$  этой прямой со стороной угла  $BA$  проводимъ прямую  $NP \perp AC$ , которая будетъ искомая прямая.



зад. 59.



зад. 60.

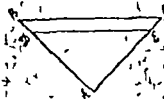
60. Между сторонами даннаго угла помѣстить прямую данной длины такъ, чтобы она отсѣкла отъ сторонъ угла равныя части.

Данъ  $\angle BAC$ . Проведемъ биссектрису  $AD$  этого угла. Изъ какой нибудь точки  $E$  прямой  $AD$  возстановляемъ перпендикуляръ  $EF$  равный половинѣ данной прямой. Затѣмъ на продолженіе этого перпендикуляра откладываемъ отрезокъ  $EG$  равный половинѣ той же самой прямой. Наконецъ въ точкахъ  $F$  и  $G$  возстановившемъ перпендикулярахъ  $EF$  и  $EG$ , пересѣченія которыхъ  $M$  и  $N$  со сторонами  $AB$  и  $AC$  угла  $BAC$  соединяемъ прямою. Прямая  $MN$  будетъ искомая.

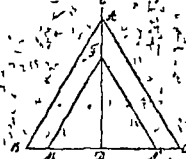
такъ какъ она равна  $EG$  и, будучи перпендикулярна къ биссектрисѣ  $AD$  угла  $BAC$ , отсѣкаетъ отъ сторонъ угла  $BA$  и  $AC$  равныя части  $AM$  и  $AN$ .

61. Построить прямоугольный  $\triangle$  по даннымъ острому углу и противолежащему катету.

На одной изъ сторонъ прямого угла  $A$  откладываемъ отръзокъ  $AC$ , равный данному катету, а на другой сторонѣ въ какой нибудь точкѣ  $D$  строимъ уголъ  $ADE$ , равный данному углу, на концѣ черезъ точку  $C$  проводимъ прямую  $BC \parallel DE$ . Треугольникъ  $ABC$  будетъ искомымъ.



зад 61



зад 63

62. Построить  $\triangle$  по двумъ угламъ и сторонѣ, лежащей между одного изъ нихъ.

Вопросъ сводится къ предыдущей задачѣ, при чемъ  $\angle$  можетъ быть  $> 90^\circ$ ,  $= 90^\circ$  и  $< 90^\circ$ .

63. Построить равнобедренный  $\triangle$  по углу при вершинѣ и основанію.

**Рѣшеніе 1-ое.** Мы знаемъ, что сумма угловъ въ  $\triangle$  равна  $180^\circ$ , а такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны, то слѣдовательно, каждый изъ нихъ  $= \frac{180^\circ - m}{2}$  (гдѣ  $m =$  при верш.) Зная основаніе и углы къ нему прилежащіе, мы можемъ построить  $\triangle$ . (Смъ рѣшъ зад. 19, в.)

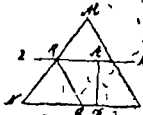
**Рѣшеніе 2-ое.** Раздѣлимъ данное основаніе  $BC$  пополамъ въ срединѣ  $D$ . Возстановимъ перпендикуляръ  $DE$ , затѣмъ раздѣлимъ уголъ при вершинѣ пополамъ при какой нибудь точкѣ  $F$  перпендикуляра  $DE$ , строимъ углы, равные половинѣ даннаго угла, и продолжимъ ихъ стороны до пересѣченія ихъ съ прямой  $BC$  въ точкахъ  $M$  и  $N$ . Проведя, наконецъ, прямую  $AB \parallel FM$ ,  $AC \parallel FN$ , получимъ искомый треугольникъ  $ABC$ .

64. Построить равнобедренный  $\triangle$  по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

Дан угол  $\angle ACB = \angle ABC$  и высота  $AD$ . Между сторонами этого угла  $\angle ACB$  помещаем прямую  $BD$ , равную данной высоте, чтобы она была перпендикулярна к стороне  $AC$  (см. рѣш. 59) и затем при  $B$  строим  $\angle ABC$ , равный  $\angle ACB$ . Треугольник  $ABC$  будет искомым.



зад 64.



зад 66.

65. Построить  $\triangle$  равнобедренный по боковой стороне и высоте, опущенной на нее.

Дана боковая сторона  $AB = AC$  и высота  $BD$ . Прямоугольный треугольник  $ABD$ , в котором дана гипотенуза  $AB$  и катет  $BD$  знаем построить (см. зад. 21, b). Построив его продолжаем по стороне  $AD$  и откладываем на ней от точки  $A$  отрезок  $AE = AB$ . Соединяя  $B$  и  $C$  прямой, получим искомый треугольник  $ABC$ .

66. Построить равносторонний  $\triangle$  по его высоте.

Дана высота  $AD$  равностороннего треугольника. Чтобы построить искомый треугольник, строим равносторонний треугольник  $MNP$  с произвольной стороной (по 3 сторонам, см. Кис. том § 65, зад. 1), затем из какой-нибудь точки  $D$  на прямой  $NP$  восстанавливаем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок, равный данной высоте  $AD$  и через точку  $A$  проводим прямую  $LR \parallel NP$ . Наконец, точку  $R$  пересечения прямой  $LR$  с  $MN$  проводим прямую  $NR \parallel MP$ . Треугольник  $NRQ$  будет искомым.

67. Разделить прямой  $\angle$  на 3 равные части.

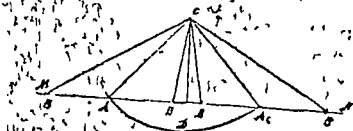
Построив равносторонний  $\triangle$ , разделим один из углов пополам. В самом деле в равностороннем  $\triangle$  все три угла

равны, почему каждый изъ нихъ равенъ  $\frac{2d}{3}$ , раздѣливъ этотъ на 2, получимъ  $\frac{2d}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}d$ .

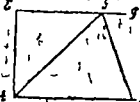
68. Построить  $\triangle$  по основанію, высотѣ (проведенной къ основанію) и къ боковой сторонѣ.

На произвольной прямой MN возстановляемъ перпендику CD, равный высотѣ, и изъ точки C, радиусомъ AC, равнымъ боковой сторонѣ, описываемъ окружность. Пересѣченіе окружности прямой MN въ точкахъ A и A<sub>1</sub> дастъ одну изъ вершинъ искомаго треугольника. Откладывая на MN отъ точекъ A и A<sub>1</sub> въправо и вълѣво отъ нихъ отрѣзки AB и A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, равныя данному основанію, соединивъ точки B и B<sub>1</sub> съ C, получимъ 2 треугольника, равныхъ искомому.

69. Построить  $\triangle$  по основанію, высотѣ и углу при основіи. Пусть ABC будетъ искомый треугольникъ. Данъ  $\angle A$ , основаніе AB и высота CD=h. На прямой откладываемъ отрѣзокъ, равный основанію AB, въ точкѣ A строимъ  $\angle CAB$ , равный данному углу, а изъ точки A возстановляемъ  $\perp AE=h$  къ AB. Проводимъ линію EF=AB. Третья вершина находится, очевидно, на этой параллельной, слѣдовательно, она будетъ въ точкѣ (на которой прямая EF пересѣкаетъ AC. Наконецъ проводимъ CB



зад. 68.

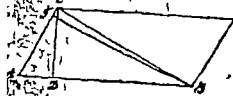


зад. 69.

70. Построить  $\triangle$  по углу и 2 высотамъ, опущеннымъ стороны этого угла.

Пусть ABC будетъ искомый треугольникъ. Известны  $\angle A$ , высота CD=h и высота BF=h'. Строимъ  $\angle CAB$  равный данному углу, въ разстояніи h' отъ AB проводимъ параллельную линію, которая пересѣкаетъ AC, опредѣлитъ вершину C, а въ разстояніи h отъ AC проводимъ къ этой прямой параллельную линію, которая пересѣкаетъ AB, опредѣлитъ точку B; такимъ образомъ получаемъ  $\triangle ABC$ , удовлетворяющій условіямъ задачи.

71. Построить  $\triangle$  по сторонам, сумм двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.  
 Положим, что данный  $\triangle$  будет  $ABC$ . В нем дано  $BC$ ,  $AB+AC=s$  и высота  $CD=h$ . На продолжении стороны  $AB$  откладываем длину  $AE=AC$  и соединяем  $E$  с  $C$ ; получим  $\triangle EBC$ , в котором даны  $BE=s$ ,  $BC$  и  $CD$ . По этим данным легко его построить. В равнобедренном  $\triangle EAC$  проведем медиану  $AF$ ; мы замечаем, что в треуголах  $AEF$  и  $AFC$  сторона  $AF$  общая,  $AE=AC$  и  $EF=FC$ , следовательно эти  $\triangle$ -ки равны и потому  $\angle AFC = \angle AFE = 90^\circ$ , следовательно,  $AF$  есть перпендикуляр, восстановленный в средней прямой  $EC$ . И так, чтобы построить искомый  $\triangle$  строим сначала  $\triangle EBC$ , из середины  $EC$  восстанавливаем перпендикуляр  $AF$  до пересечения с  $BE$  в  $A$  и затем соединяем  $A$  с  $C$  и прямая  $ABC$  искомый.

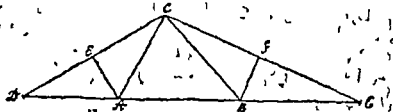


зад. 70



зад. 71

72. Построить  $\triangle$  по двум данным углам и периметру.  
 Предположим, что задача решена, и пусть  $ABC$  будет треугольный  $\triangle$ . Если на противоположных продолжениях его стороны  $AB$  отложим от точек  $A$  и  $B$  части  $AD=AC$  и  $BE=BC$ , то будем иметь  $DE=2p$ , а из равенств  $AD=AC$  и  $BE=BC$ , вы-

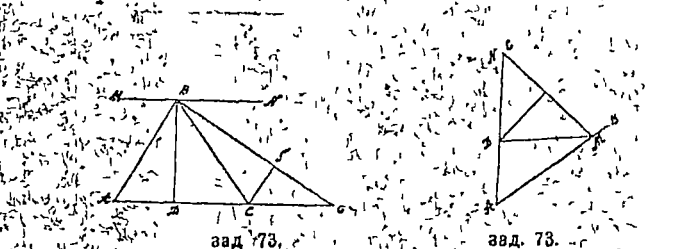


зад. 72.

из чего, что  $\triangle$ -ки  $DAC$  и  $CBE$  равнобедренны и что углы у них при основании определяются данными углами:  $\angle D = \frac{1}{2} \angle CAB$  и  $\angle E = \frac{1}{2} \angle CBA$ , вместе с тем очевидно определяется место вершин  $A$  и  $B$ , и задача разлагается на 2 следующие: 1) построить



73. На какой-нибудь прямой АС при точкѣ А строимъ  $\angle$  ВА равный данному углу, и затѣмъ изъ какой-нибудь точки D, прям АС, принявъ ее за основание искомага треугольника, на разстоян. т. е. на разстоян. равномъ данной высотѣ, проводимъ прям MN, параллельную АС, которая, пересѣкаетъ сторону АВ уг ВАС въ точкѣ В. Эта прямая АВ есть одна изъ сторонъ искомаго  $\Delta$ -ка. Такимъ образомъ задача сводится къ задачѣ: Построить  $\Delta$  по данной сторонѣ по прилежащему углу и по суммѣ 2-хъ другихъ сторонъ.



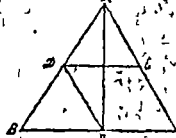
Предположим, что требуемый  $\triangle$ -к<sup>т</sup> построить, а именно  $\triangle ADM$  есть искомый, в котором  $\angle MAD =$  данному  $\angle A$ , сторона  $AM =$  данной стороне  $b$ , и сумм<sup>а</sup> сторон  $AD + DM = s$ . На продолжении стороны  $AD$  откладываем часть  $DN =$  стороне  $DM$ ; соединив точки  $M$  и  $N$ , прямою  $MN$ , получаем равнобедренный  $\triangle MDN$ . Если из середины  $E$  основания  $MN$  равнобедренного  $\triangle$ -ка  $MDN$  проведем перпендикуляр  $DE$ , который по свойству равнобедренного  $\triangle$ -ка, пройдет через его вершину  $D$ , то  $D$  будет третьей точкой искомого  $\triangle$ -ка. И так мы видим, что для построения искомого  $\triangle$ -ка по данным  $s, b$  и  $A$  должно поступить так: на какой-нибудь произвольной прямой  $AB$  при точк<sup>е</sup>  $A$  строим  $\angle BAC =$  данному  $\angle$ -у; затем на сторонах его  $AB$  и  $AC$  откладываем части  $AM =$  данной стороне  $b$ , и  $AN$ , равную данной длин<sup>е</sup>  $s$ ; соединив точки  $N$  и  $M$  прямою  $NM$ , получаем  $\triangle ANM$ . Если из этой  $\triangle$ -к<sup>и</sup> из середины  $E$  стороны  $NM$  восстановим пер-

тангуляр, который пересечет сторону  $AN$  в точке  $D$ , т. е. соединив эту точку с  $M$  прямой  $DM$ , получим искомый  $\triangle ADM$ .

74. Положим, что прямая  $DE$  искомая; пусть  $DE = DB$ ,  $FE = EC$ . Соединив точку  $F$  с  $B$  и  $C$ , получим 2 равнобедренные  $\triangle BDF$  и  $FEC$ . Имеем  $\angle ADF = \angle DBF + \angle DFB = 2\angle DBF$ , откуда  $\angle DBF = \frac{1}{2}\angle ADF = \frac{1}{2}\angle ABC$ , т. е. линия  $BF$  будет биссектрисой угла  $ABC$ ; точно также  $FC$  будет биссектрисой  $\angle ACB$ , следовательно, точка  $F$  лежит в пересечении двух биссектрис  $BF$  и  $FC$ . Откуда ясно построение.

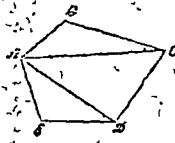


зад. 74.

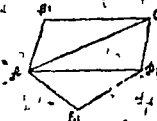


зад. 75.

75. Положим, что задача и что искомая прямая  $DE$  найдена, тогда  $AD = EC$ . Проводим через точку  $D$  прямую  $DE \parallel AC$ ; получим  $DE = EC = AD$ . Соединив точки  $A$  и  $F$  прямой, получим равнобедренный  $\triangle ADF$ , почему  $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BDF = \frac{1}{2}\angle BAC$ , т. е. линия  $AF$  будет биссектрисой  $\angle BAC$ . Из этого следует, что для решения задачи должно провести биссектрису  $\angle A$ , через  $F$  точку пересечения ее с основанием  $BC$  провести прямую  $DE \parallel AC$  и через точку  $D$  прямую  $DE \parallel BC$ . Прямая  $DE$  будет искомой.



зад. 76.

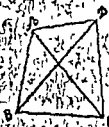


76. Проводим в данном многоугольнике все диагонали  $AC$ ,  $AD$ , выходящая из одной вершины  $A$ . Строим  $\triangle$ -ки  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2C_1D_1$ ,  $A_3D_1E_1$ , соответственно равные тр-кам  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ . Полученный многоугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1$  будет требуемый, ибо составлен из  $\triangle$ -ков равного числа, одинаково расположенных и равных тр-кам данного многоугольника.

77. Положим, что даны  $\angle A$ ,  $B$ ,  $C$  и 2 стороны  $AD$  и  $AB$  образующия 4-й угол  $D$ . Мы знаем, что сумма внутренних углов многоугольника  $= 2d$ , умноженным на число сторон  $- 2$ , т.е. в данном случае  $2d(4-2) = 2d \cdot 2 = 4d$ , почему искомый  $\angle D = 4d - (A+B+C)$ . Построим  $\angle D$ , откладывая на его стороны отрезки, равные сторонам  $AD$  и  $CD$ . Затем при точках строим углы  $=$  данному  $\angle A$  и при точках  $C$  углы  $=$  данному  $\angle C$ . Продолжая стороны  $\angle A$  и  $C$  до пересечения в точке  $D$  найдем четвертую вершину искомого 4-ка  $ABCD$ .

78. Даны стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и диагональ  $AC$  и  $BD$ . Строим сперва  $\triangle ABC$  по 3 данным сторонам, затем на  $BC$   $\triangle BCD$  тоже по 3 данным сторонам. Наконец, соединив прямою вершины  $A$  и  $D$ , построенных  $\triangle$ -ов  $ABC$  и  $BCD$ , получим искомый 4-угольник  $ABCD$ .

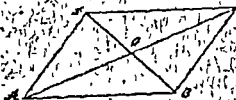
79. Положим, даны две стороны  $AB$  и  $AD$  и диагональ  $BD$ . Построим треугольник  $ABD$  по 3 данным сторонам, проводим через  $B$  прямую  $BC \parallel AD$  и через  $D$  прямую  $DC \parallel AB$ . Пересечение прямых  $BC$  и  $DC$  в точке  $C$  определит четвертую вершину искомого параллелограмма.



Зад. 77.



Зад. 79.



Зад. 80.

80. Даны диагональ и сторона  $AB$ . Стало быть, все три стороны  $\triangle$ -ка  $AOB$  известны. Строить этот  $\triangle$ -к: продолжатъ длину  $AO$  на длину  $OC=AO$  и  $OB$  на длину  $OD=OB$ , потомъ проводить  $AD$ ,  $DC$  и  $BC$ .

81. Положим, даны диагонали  $AC$  и  $DB$  и  $\angle AOB$ . Строим  $\triangle AOB$ , въ которомъ известны  $\angle O$  и стороны  $AO$  и  $BO$ , потомъ достраиваемъ параллелограмъ. (См. рѣш. зад. 80).

82. Дано основание  $AD$ , высота  $FE$  и диагональ  $AO$ . На прямой  $AD$  изъ какой-нибудь точки  $E$  возставляемъ перпендикуляръ  $EF$ , равный данному, затемъ, чрезъ точку  $F$  проводимъ прямую  $BC \parallel AD$ , наконецъ изъ точки  $A$  описываемъ дугу радиусомъ равнымъ диагонали  $AC$ . Пересѣчение этой дуги въ точкѣ  $C$  съ пря-

мож. BC, определять одну из вершин параллелограмма. Соединив точку C с D и затем провести через точку A прямую  $AB \parallel CD$  получим искомый параллелограмм ABCD.

83. Проводя прямые AB и CD под данным углом и взяв OA, OB, OC и OD равными между собою и равными половине данной диагонали, находим в ABCD искомый прямоугольник.



зад. 82



зад. 83

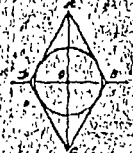
84. Решение то же, что и в зад. № 79: только  $AB = AD$ .

85. Эту фигуру построить легко, помня что в ромбе диагонали перпендикулярны и делятся пополам.

86. Дана высота BE и диагональ BD. Построить прямоугольный  $\triangle BDE$  по катету BE и гипотенузе BD (см. р-ш. зад. 21, b) продолжим другой катет его ED влево и через вершину B проведем прямую  $BC \parallel ED$ . Затем из середины O гипотенузы BD возстаиваем по обе стороны ее перпендикуляр АОС. Точка пересечения этого перпендикуляра с прямыми AD и BC определят две другие вершины ромба. Таким образом искомый ромб будет ABCD.



зад. 86



зад. 87

87. Зная один угол, знаем и остальные. Положим, что задача решена и пусть ABCD искомый ромб. В прямоугольном  $\triangle AOB$  известны  $\angle ABO = \frac{1}{2} \angle B$  и сторона  $BO = \frac{1}{2} BD$ , и потому можно построить этот треугольник, а следовательно, и ромб.

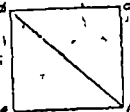
88. Дан  $\angle BAD$  и диагональ BD. Так как в  $\triangle ABD$  сторона  $AB = AD$ , то он будет равнобедренным, в котором дано основание BD и  $\angle A$  при вершине. Этот  $\triangle$  мы можем по-

строить (см. рѣш. зад. 63). Проведя через  $B$  прямую  $BC \parallel AD$  и через  $D$  прямую  $DC \parallel AB$ , найдем четвертую вершину  $C$  ромба  $ABCD$ . (См. чертеж зад. № 86).

**89.** Дана сумма диагоналей ромба  $AC + BD = s$  и  $\angle CAD$ . Чтобы построить искомый ромб, построим сперва  $\triangle AOD$ , в котором даны  $\angle OAD$ ,  $\angle AOD = d$ , и угол  $ODA = d - \angle OD$  и кроме того  $AO + OD = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}s$ . Чтобы построить его продолжим  $AO$  на длину  $OE = OD$ .  $\triangle OED$  равнобедренный, вследствие этого  $\angle OED = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}d$  сверх того известны  $\angle OAD$  и сторона  $AE$ , поэтому  $\triangle AED$  может быть построен. Строим его и в средней линии  $ED$  восстанавливаем перпендикуляр  $OM$ , который определяет вершину  $O$   $\triangle AOD$ . Наконец проводим  $OD$ . Итак, мы построим  $\triangle AOD$ . Продолжая  $OD$  на длину  $OB = OE$  и  $AO$  на длину  $OC = AO$ , определим вершины  $B$  и  $C$  ромба. Соединив  $A$  съ  $B$ ,  $B$  съ  $C$ ,  $C$  съ  $D$  прямыми, получим искомый ромб  $ABCD$ .



зад. 89.



зад. 90.

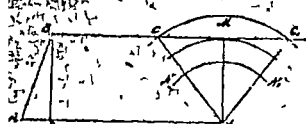
**90.** Эта задача сводится на построение равнобедренного  $\triangle$  в котором даны основание  $BD$  и прямой угол при вершине (см. рѣш. зад. № 63). Построив  $\triangle ABD$ , проводя через точки  $D$  и  $B$  параллельныя къ  $AB$  и  $AD$ , которые определяют точку  $C$ .

**91.** Дано основание  $AD$ , параллельныя стороны  $AB$  и  $DC$  и  $\angle BAD$ . На прямой  $AD$  при точкѣ  $A$  строим  $\angle BAD$ , равный данному, а на сторонѣ  $AB$  откладываемъ одну изъ непараллельныхъ сторонъ. Черезъ точку  $B$  проводимъ прямую  $BC \parallel AD$  и, наконецъ изъ точки  $D$  описываемъ дугу радиусомъ, равнымъ второй непараллельной сторонѣ  $DC$ . Точка пересечения  $C$  описанной дуги съ прямою  $BC$  определяетъ четвертую вершину трапеціи.

Если  $CD > BE$  (гдѣ  $BE$  высота трапеціи) то дуга, описанная радиусомъ, равнымъ  $CD$ , пересѣчетъ прямую  $BC$  въ двухъ точкахъ и тогда получимъ двѣ трапеціи  $ABCD$  и  $ABCE$ . Если  $CD = BE$  то дуга коснется прямой  $BC$  въ точкѣ  $M$  и получимъ одну только

трапецию  $ABMD$ . Если  $CD < BE$ , то дуга  $NN_1$  не может пересечь прямой  $BC$ , и потому трапецию построить нельзя.

**92** Даны две непараллельные стороны  $AB$  и  $CD$  и разность оснований  $AD - BC = AE$ . Строим  $\triangle ABE$  по 3. данным сторонам, затем, через точку  $B$  проводим прямую  $BO \parallel AE$ . Из точки  $A$  описываем дугу радиусом, равным данной диагонали. Точка пересечения  $C$  этой дуги с прямой  $BO$  определяет третью вершину искомого трапеции. Проведя через точку  $C$  прямую  $CD \parallel BE$ , в точке  $D$  пересечения ее с продолжением  $AE$  найдем четвертую вершину искомого трапеции  $ABCD$ .

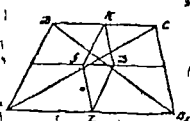


зад 91

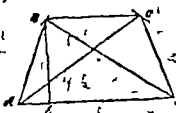


зад. 92.

**92а)** Предположим, что задача решена, и пусть  $ABCD$  будет искомым трапецией, стороны которой  $AB, BC, CD, DA$  обозначим через  $a, b, c, d$ . Зная стороны трапеции, мы знаем длину линии  $EE'$ , соединяющей середины непараллельных сторон, именно  $EE' = \frac{1}{2}(a + c)$  и длину отрезка  $gD'$ , захватываемого на линии  $EE'$  диагоналями трапеции, именно  $gD' = \frac{1}{2}(a - c)$  \*). Построив на отрезке  $gD'$ ,  $\triangle gD'K$ , имеющий двумя другими сторонами  $gK = \frac{1}{2}d$  и  $D'K = \frac{1}{2}b$ , и потом построив параллелограмм  $gKD'Z$ , проводим через его вершины  $K$  и  $Z$  параллельные линии  $gD' \dots$  и проч.



зад 92а.



зад. 93

**93.** Дано основание  $AD$ , высота  $BE$  и диагонали  $AC$  и  $BD$ . Из какой-нибудь точки  $E$  основания  $AD$  возстаиваем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок, равный данной высоте  $BE$ . Через точку  $B$  проводим прямую  $BC \parallel AD$ . Из точки  $A$  описываем дугу радиусом, равным диагонали  $AC$ , а из точки

\*) См. 1-е примечание в конце сборника.

1) Дугу радиусом, равным диагонали BD. Точки пересечения B и C этих дуг с прямой BC определяют две другие вершины трапеции. Соединяя A с B и C с D, найдем искомую трапецию ABCD.

94. В искомой трапеции ABCD даны: AC, AB, BD, DC. Проведем  $BE \parallel AC$ , видим, что  $CE = AB$  и  $BE = AC$ , следовательно,  $\triangle BEC$  можно построить по 3 сторонам, так как  $BE = DC + CE = DC + AB$ . Затем, проведя  $AB \parallel DE$  и отложив на ней дугу равную AB, получим 4-ую вершину трапеции A.

95. Пусть ABCD будет искомым квадратом, т. е. такой, в котором сумма диагонали BD и стороны AD равна данной линии. Чтобы найти эту данную линию на фигуре, продолжим сторону AD квадрата на расстояние DE = DB. Это равенство  $DE = DB$  уже является нам равнобедренный  $\triangle DBE$ , которого  $\angle E = \frac{1}{2} \angle ADB = \frac{1}{4} \angle ADB$ , следовательно, прямоугольный  $\triangle ABE$  определит: знаем

его катет  $AE = s$  и  $\angle E = \frac{1}{4} \angle ADB$ . Построим этот  $\triangle ABE$ , другой его катет AB будет стороной искомого квадрата.

Другой способ: Обозначив через x сторону a через y диагональ искомого квадрата будем иметь  $y + x = s$ ,  $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ ,  $\frac{y+x}{x} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$ , следов.  $\frac{s}{x} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$ , т. е. сторона x искомого квадрата

есть четвертая пропорциональная к 3-м линиям: s,  $\sqrt{2}+1$  и 1.



зад. 94.



зад. 95.



зад. 96.

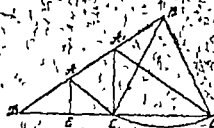
96. Основываясь, как во П-м решении предыдущей задачи, на том, что отношение диагонали квадрата к его стороне есть количество постоянное  $\sqrt{2}$ , даем следующее построение: На диагонали AC какого-нибудь кв-та ABCD определяем отрезок  $AE = AC - CD$  и на той же AC откладываем от точки A линию  $AF = d$ , данному избытку диагонали над стороной искомого квадрата; проводим линию ED и из точки F проводим параллельную

мом  $ED$  до встречи со стороной  $AD$  в точке  $G$ . Квадрат  $ENR$  будет искомым.

97. Даны 2 диагонали  $AC$  и  $BD$  и высота  $BE$  искомого параллелограмма. Проводимъ двѣ параллельныя линіи  $KZ$  и  $MN$  раздѣляя между которыми  $\equiv$  высоту  $BE$  искомого параллелограмма. Изъ какой-нибудь точки  $A$  на прямой  $KZ$  описываемъ дугу радиусомъ равнымъ диагонали  $AC$  до пересѣченія ея съ прямою  $MN$  въ точки  $C$ . Раздѣливъ діагональ  $AC$  пополамъ, изъ середины  $O$  радиусомъ равнымъ  $\frac{1}{2}$  диагонали  $BD$  описываемъ дуги. Точки  $B$  и  $D$  пересѣченія ихъ съ прямыми  $ZK$  и  $MN$  определятъ другія вершины искомого параллелограмма  $ABCD$ .



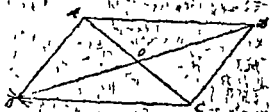
зад. 97.



зад. 98.

98. Чтобы рѣшить эту задачу, мы построимъ  $\triangle ABC$ , въ которомъ извѣстны сторона  $BC$ , противолежащій  $\angle A$  и сумма  $AB + AC$ . Продолжимъ  $AB$  на длину  $AD = AC$ .  $\triangle DAC$  равнобедренный; вслѣдствіе этого,  $\angle BAC = 2d$ , откуда  $D = \frac{1}{2}BAC$ . Отсюда выдѣлать слѣдующее построение: строить  $\angle D = \frac{1}{2}BAC$ ; брать  $DB = BA + AC$  и изъ точки  $B$ , какъ изъ центра радиусомъ  $BC$  описывать дугу, которая пересѣчетъ линію  $DC$  въ точкѣ  $C$ . Перпендикуляръ  $EA$ , возстановленный изъ середины линіи  $DC$ , опредѣлитъ вершину  $A$ . Проводимъ  $AC$  и  $BC$  и получимъ  $\triangle ABC$ . Продолживъ  $AB$  на длину  $AM = AB$  и  $AC$  на длину  $AN = AC$ , соединимъ точки  $M$  съ  $C$ ,  $M$  съ  $N$  и  $N$  съ  $B$ , тогда получимъ искомымъ параллелограммъ  $MNBC$ .

99. Предположимъ, что  $\triangle ABC$  искомымъ; въ немъ даны стороны  $AB$  и  $BC$  и медиана  $BO$ . Отложивъ на продолженіи  $BO$  отъ точки  $O$   $OD$ , равный  $BO$ , и соединивъ точку  $D$  съ вершинами  $A$  и  $C$ , получимъ параллелограммъ  $ABCD$ , въ которомъ извѣстны  $AB$ ,  $BC$  и  $BD$ . Параллелограммъ  $ABCD$  легко построить; для этого должно изъ  $A$  и  $D$  радиусами, равными  $AB$  и  $BD = 2BO$ , опи-



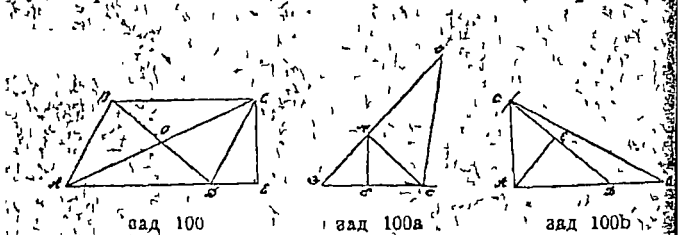
зад. 99.



сать окружность и точку их пересечения В соединить съ точкой А и D. Точка В будет третьей вершиной параллелограмма, чрезъ В проведемъ линию  $BC \parallel AD$  и чрезъ D линию  $DC \parallel AB$ . Точка ихъ пересечения С даетъ четвертую вершину параллелограмма. Соединивъ АС прямою, получимъ искомый  $\triangle ABC$ .

100. Положимъ  $\triangle ACD$  искомымъ треугольникомъ: въ немъ сторона  $AD$ , его высота  $CE$  и медиана  $OD$ . Отложивъ на продолженіи  $OD$  отръзокъ  $OB = OD$  и соединивъ точку В съ вершинами А и С, получимъ параллелограммъ, который, можемъ построить даннымъ  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ . Проведа диагональ АС, получимъ искомымъ  $\triangle ACD$ .

100а). Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть  $ABC$  будетъ искомымъ прямоугольный  $\triangle$ . Въ немъ известны гипотенуза  $BC$  и сумма катетовъ  $AB + AC$ . Продолжимъ катетъ  $AB$  на длину  $AD = AC$ .  $\triangle DAC$  равнобедренный, вслѣдствіе этого  $\angle BAC = 2\angle A$ . Откуда  $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC$ . Отсюда слѣдуетъ построение: строимъ  $\angle ADC = \frac{1}{2}d$ , беремъ  $DB = BA + AC$  и изъ точки В, какъ центра, радиусомъ  $BC$  описываемъ дугу, которая пересѣчетъ линию  $DC$  въ точкѣ С. Перпендикуляръ  $EA$ , восстановленный изъ середины  $DC$ , опредѣлитъ вершину А. Проводимъ  $AC$  и  $BC$  и задача будетъ рѣшена.

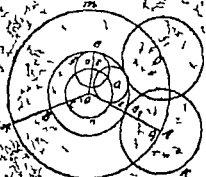


100б). Пусть  $ABC$  будетъ искомымъ треугольникомъ. Дана гипотенуза  $BC$  и разность катетовъ  $BA - AC$ . Возьмемъ прямую  $AD$  и проведемъ  $DC$ . Въ равнобедренномъ  $\triangle ADC$   $\angle ADC = \frac{1}{2}d$ . Но  $\angle CDB = 2d - \frac{1}{2}d = \frac{3}{2}d$ . Отсюда слѣдующее построение: строимъ  $\angle BDC = \frac{3}{2}d$ ; беремъ  $DB = BA - AC$  и изъ точки В, какъ центра, радиусомъ  $BC$  описываемъ дугу, пересѣкающую линию  $DC$  въ точкѣ С. Продолжаемъ  $BD$  и въ серединѣ  $DC$  восстанавливаемъ перпендикуляръ, который опредѣляетъ вершину А; наконецъ проводимъ  $AC$ , и задача рѣшена.

103. Искомое геометрическое место будет находиться на прямой, параллельной данной прямой в расстоянии данного радиуса от нее с обеих сторон.

105. L. Касата, внешнее; искомое геометрическое место бу-  
 дит окружность, с<sup>2</sup> (самая большая), радиус которой равен  
 элементарная геометрия. 3.

$OA_1$ , т. е. сумма радиусов  $OB_1$  (данной окружности) и  $B_2A_2$  (того радиуса); касающиеся окружности:  $K$  и  $L$ .  
 II. Касание внутреннее, искомое геометрическое место: «п», радиус которой равен  $OC$ , т. е. разности радиусов  $OB - CB = OB_1 - B_1C$ ; касающиеся окружности:  $f$  и  $e$ .



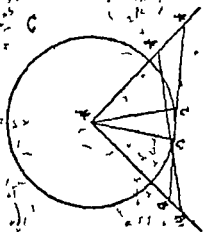
зад 105



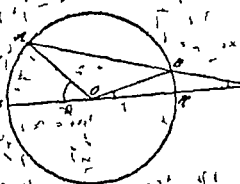
зад 106

106. Пусть  $O$  будет центр данной окружности, по которой движется прямая длины  $AA_1$ ;  $A$  и  $B$  — два положения конца прямой на данной окружности;  $A_1$  и  $B_1$  — положения другого конца той же прямой в пространстве, при чем,  $AA_1 \parallel BB_1$ ; проводим  $OO_1 \parallel AA_1$  и соединим  $AO, OB, OA_1, OB_1$ ; фигуры:  $OAA_1O_1, OBB_1O_1$  — параллелограммы, откуда получаем:  $OA = OA_1$  и  $OB = OB_1$ ; след.,  $OA = OB$ , как радиусы одной окружности, то  $OA_1 = OB_1$ , т. е. искомое геометрическое место есть окружность, радиус которой равен разности радиусов данной и той, центр которой находится на  $OO_1 \parallel AA_1$  на расстоянии  $AA_1$  от данного центра.

107.  $AB$  и  $A_1B_1$  — два положения одной и той же прямой; прямоугольных  $\triangle$ -ов  $AMB$  и  $A_1MB_1$  находим:  $MC = \frac{AB}{2} = \frac{A_1B_1}{2} = MC$ ; и искомое геометрическое место есть окружность, радиус которой равен  $MC = \frac{AB}{2}$ .



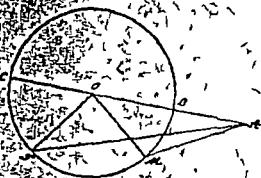
зад. 107.



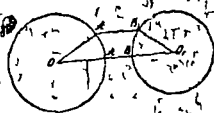
зад. 107a.

107. а) Так как  $BC=BO$ , то  $\triangle OBC$  равнобедренный и  $\angle BCO = \angle BOC$ .  $\angle BOC$  измеряется  $BK$ , а  $\angle BCO$  измеряется  $AD$ .  $BK$  отсюда:  $\frac{AD}{2} = \frac{BK}{2}$ , и  $AD = BK = 2 \cdot BK$ , откуда  $AD = 3 \cdot BK$  и  $\angle AOD = 3 \angle BOK = 3 \angle BCO =$

108. Дана точка  $A$  вне окружности. I- требуется доказать, что короче любой прямой, наприм.  $AM$ ; из  $\triangle AMO$  имеем:  $AB + BO < AM + MO$ , откуда  $AB < AM$ ; II требуется доказать, что  $AC$  короче всякой другой линии, напр.  $AN$ ; из  $\triangle ANO$  имеем:  $AO + ON > AN$ , или  $AO + OC > AN$ , или  $AC > AN$ .



зад. 108.



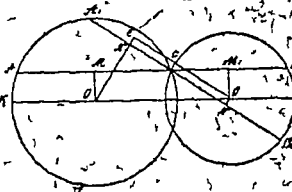
зад. 109.

109. Доказать, что  $AB < A_1B_1$ , проводим  $OA_1$  и  $O_1B_1$ , получим  $OA + AB + BO_1 < OA_1 + A_1B_1 + B_1O_1$ , откуда имеем:  $AB < A_1B_1$ ,  $\angle ACD$ .

110. Через данную точку  $M$  проходят две хорды  $AB$  и  $A_1B_1$ , доказать, что  $AB < A_1B_1$ ; заметим, что  $AB \perp OM$ , проведем  $OA_1$  и  $O_1A_1$ , из  $\triangle OMN$  имеем, что  $ON < OM$ , след., хорда  $A_1B_1$ , ближе к центру и поэтому  $A_1B_1 > AB$ .



зад. 110.



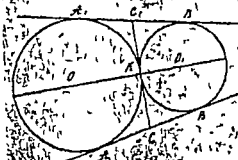
зад. 111.

111. Через точку  $C$  пересечения проведены хорды  $A_1B_1$  и  $AB \parallel KZ$ ; требуется доказать, что  $AB > A_1B_1$ ; для этого опустим из центров  $O$  и  $O_1$  перпендикуляры:  $OM$ ,  $O_1M_1$ ,  $ON$  и  $O_1N_1$ ;  $MC = \frac{BC}{2}$  и  $M_1C = \frac{A_1C}{2}$ , откуда  $MC + CM_1 = MM_1 = \frac{BC}{2} + \frac{A_1C}{2} = \frac{AB}{2} = OO_1$ ; точно также  $NN_1 = \frac{A_1B_1}{2} = EO_1$ ; вместо того, чтобы доказы-

Въѣтъ, что  $\angle AB > \angle A_1B_1$ , можно доказывать, что  $\frac{\angle AB}{2} > \frac{\angle A_1B_1}{2}$ . Т. е.

$\angle O > \angle O_1$ . Это очевидно изъ  $\triangle OBO$ .

112. Касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окружности равны, слѣд.,  $CB = CK = CA$  и  $CA_1 = CK = CB_1$ .



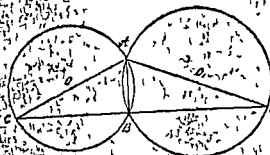
зад. 112.



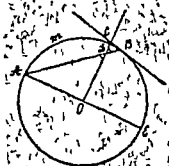
зад. 113.

113. Въ большей окружности хорда  $AB =$  хорда  $A_1B_1$ ; значитъ онѣ равно удалены отъ центра, т. е.  $OC = OC_1$  и окружность, проведенная этимъ радиусомъ  $OC$  будетъ касаться хорды  $AB$  и  $A_1B_1$ .

114. Соединимъ  $C$  съ  $B$  и  $C_1$  съ  $B_1$ ; кроме того, соединимъ  $A$  и  $B$ .  $\angle ABC = d$ , т. е. онѣ опираются на диаметръ; точно такъ  $\angle ABC_1 = d$ ; слѣдовательно,  $\angle ABC + \angle ABC_1 = 2d$  и линія  $BC$  и  $BC_1$  составляютъ продолженіе одна другой.



зад. 114.



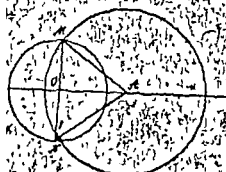
зад. 114а.

114. а.  $\angle DBC$  измѣряется  $\frac{\widehat{AB}}{2}$ ;  $\angle BDC = \angle ADO = d = \angle DAO$  (т. е.  $\triangle ADO$  прямоугольный),  $\angle DAO + \angle ADO = 90^\circ = d$ , т. е. измѣряются полуокружностью  $EBA$ , дѣленной на  $2$ .  $\angle DAO = \angle BAE$  измѣряется  $\frac{\widehat{BE}}{2}$ ; слѣд.,  $\angle ADO = \angle BDC$  измѣряется  $\frac{\widehat{EBA} - \widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ ; откуда слѣдуетъ, что  $\angle DBC = \angle BDC$  и  $\triangle BDC$  — равнобедренный,  $BC = CD$ .

114. В  $\angle DAC = \angle \frac{AO, C}{2}$ , т. е. они опираются на одну и ту же дугу, по той же причине  $\angle BAD = \angle \frac{AO, B}{2}$ ; след.,  $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle \frac{BOA + \angle AO, C}{2}$ , а т. к. в четырехугольнике  $BOOC$   $\angle OBC$  и  $\angle OCB$  прямые, то  $\angle BOA + \angle AO, C = 2d$ , откуда следует, что  $\angle BAC = \angle \frac{BOA + \angle AO, C}{2} = \frac{2d}{2} = d$ .



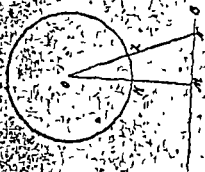
зад. 114



зад. 117

117. Проводимъ черезъ данную точку А и черезъ центръ даннаго круга О прямую линию; проводимъ, черезъ точку О  $MN \perp AO$ ;  $AM = AN$  есть центръ искомою окружности.

118. Изъ точки О опускаемъ  $OM \perp AB$ ,  $KM$  будетъ расстояниемъ наименѣе удаленной точки М; нужно доказать, что  $KM < ZN$ , расстояния какой-либо другой точки N и въ самомъ дѣлѣ,  $OM < ON$ , какъ перпендикуляръ меньше наклонной, отсюда слѣдуетъ, что  $OK + KM < OZ + ZN$ , или  $KM < ZN$ .



зад. 118



зад. 119

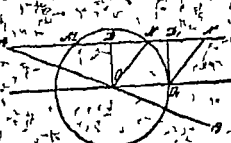
119. Данная хорда AB; центръ круга О; пусть искомая хорда MN составлять съ данною  $\angle BDN$  и дѣлается ею пополамъ въ точкѣ D; проведемъ черезъ точку D диаметръ, онъ будетъ  $\perp MN$ , а диаметръ  $\perp$  къ хордамъ въ ихъ срединѣ; проведемъ, кромѣ того,  $KZ \parallel MN$ , тогда  $\angle BEZ = \angle BDN$  и диаметръ перпендикуляренъ

и длину пополам в точке  $F$  эту линию  $KZ$ , откуда от построения; в произвольной точке  $E$  проводим хорду  $KZ$  длиной, углом к данной хорде  $AB$  и проводим  $OR \perp KZ$  где  $D$  будет пересечение искомой хорды с  $AB$ ; через  $D$  проводим  $MN \parallel KZ$ .

120. Данную точку  $A$  соединяем с центром круга  $O$  тем проводим  $MN \perp OA$ ;  $MN$  есть искомая хорда.



зад. 120.

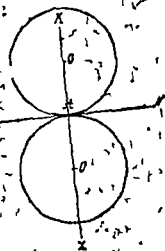


зад. 121.

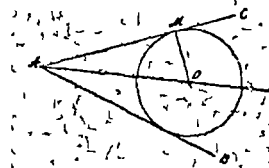
121. Пусть искомая окружность построена;  $\angle BAC$  — дано; кроме того дано положение точки и длина хорды  $MN$ ; из точки опускаем  $OD \perp MN$ ; соединяем  $O$  и  $N$ ;  $ON$  есть радиус исконой окружности; откуда следует построение: из данной точки  $O$  проводим  $OD \perp AC$  от точки  $D$  пересечения откладываем  $DN =$  соединяем  $O$  и  $N$  и получаем  $ON$  радиус искомой окружности.

122. В произвольном месте стороны  $AC$  (см. черт.) откладываем  $N_1D_1 = \frac{MN}{2}$ ; потом из точки  $N_1$  радиусом, равным данному, пересекать перпендикуляр  $D_1O_1$  в точке; через точку  $O_1$  проводим  $OO_1 \parallel AC$  находим точку  $O$  центра искомого круга; радиус  $ON = O_1N_1$ , т. е. данному.

123. Через точку  $A$  (данную) данной прямой  $MN$  проводим  $KZ \perp MN$ ; откладываем данным радиусом от точки  $A$  по  $AO_1$  получим два искомого центра.



зад. 123.

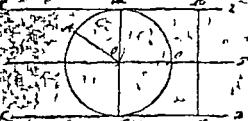


зад. 124

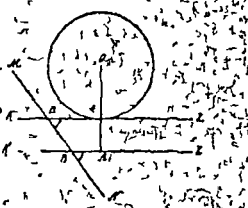
124.  $AO$  есть биссектриса данного угла  $BAC$ ; значит, центр  $O$  этой окружности лежит на пересечении биссектрисы с  $OM$  — с  $AB$  данной точки  $M$ .

125. Этот вопрос решается в теории.

126. Центр искомой окружности лежит на линии  $EF \parallel CD$  проходящей по средине между данными  $KZ$  и  $CD$ , и, кроме того, в расстоянии от данной точки  $A$ , равном радиусу  $OM$ ; итак, чтобы найти искомый центр, надо провести  $M, N \perp CD$  через средину  $M, N$ , т. е. точку  $O$ , провести  $EF \parallel KZ$  и из точки  $A$  — окружность, равным  $O, M$ , пересечь линию  $EF$ .  $O$  есть центр искомой окружности, т. к.  $OA = OM = ON$ .



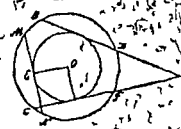
зад 126



зад 127

127. В произвольной точке  $B$ , данной прямой  $MN$  проводим линию  $K, Z$  под данным углом  $Z, B, N$  к данной прямой  $MN$ ; из центра  $O$  данной окружности опускаем  $OA \perp K, Z$  и через точку пересечения  $A$  проводим  $KZ \parallel K, Z$ ;  $KZ$  есть искомая касательная.

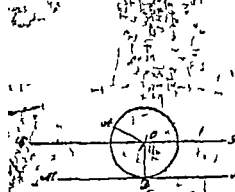
128. Строим где-нибудь в данном круге (на черт. больше) хорду  $MN$  данной длины, проводим  $OE \perp MN$  и радиусом  $OE$  описываем окружность; потом из данной точки  $A$  проводим две касательные  $AB$  и  $AC$  к этой окружности,  $AB$  и  $AC$  — искомого решения, т. к.  $BD$  и  $CF$  равны  $MN$ , так хорды равно-удаленны от центра; обозначив длину данной хорды через «а», данный радиус (данной окружности) через «г»; в случае, если  $\angle < 2g$  (данная хорда меньше диаметра) имеем, как показали, два решения; если  $a = 2g$  (хорда равна диаметру) одно решение, если же  $\angle > 2g$ , то ни одного решения, т. к. хорда никогда не может быть больше диаметра.



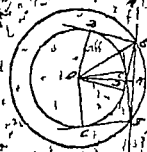
Зад 128



129. Искомый центр  $O$  лежит на линии  $EE' \parallel MN$  (данной и проведенной в расстоянии  $OD$ , равном данному радиусу  $OM$ ), и кроме того, на пересечении с дугой, проведенной из той же точки  $A$  данным радиусом.



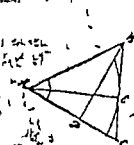
зад. 129.



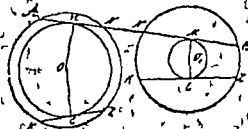
зад. 130.

130. Строим прямоугольный  $\triangle$ , один катет которого равен радиусу данного круга  $OD$ , а другой равен длине касательной  $DE$ ; гипотенуза этого  $\triangle$  на  $OE$  будет служить радиус окружности, геометрического места точек, из которых касательная к данной окружности равна данной длине  $DE$ ; на пересечении этой окружности с данной прямой  $AB$  находим две точки  $E$  и  $F$  искомые (два решения), два решения будут в том случае, когда  $OE > OK$  (перпендик. к  $AB$ ); одно решение, когда  $OE = OK$ ; ни одного, когда  $OE < OK$ , так как в этом не будет сущений  $E$  и  $F$ .

131. Сначала строим  $\triangle ABD$ , в котором дан  $\angle A$  и катет  $BD$ , т. е. высота искомого  $\triangle ABC$ ; чтобы найти искомый до из точки  $A$  радиусом, равным другой высоте  $AE$  провести окружность, и из точки  $B$  к ней касательную  $BC$ .



зад. 131



зад. 132.

132. Строим в произвольных местах данных окружностей хорды данной длины  $KZ$  и  $KZ_1$ ; находим их расстояния от центров; это будет соответственно  $OE$  и  $O_1E_1$ ; и радиусы равными этим перпендикулярам, описываем две concentric окружности, к которым потом проводим общую касательную  $AB$ , которая и будет искомым случаем; доказать легко.

133. Из данных точек  $A$  и  $B$  описываем окружности радиусами, равными, соответственным, перпендикулярам из этих точек на искомую прямую; потомъ съ этими окружностями проводим 4 общихъ касательныхъ, которыя будутъ искомыми прямыми.



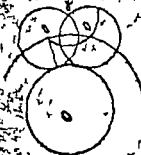
зад. 133.



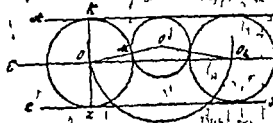
зад. 134.

134. Черезъ центръ данной окружности  $O$  и черезъ данную точку касанія  $M$  проводимъ, прямую, на которой долженъ лежать центръ искомой окружности, кромѣ того соединимъ двѣ данныя точки  $A$  и  $M$  и изъ середины прямой  $AM$  возставимъ  $EK \perp AM$ ; на пересѣченіи съ  $OO$  находимъ искомый центръ  $O'$ ; замѣтимъ, что  $O'A = O'M$ .

135. Радиусъ искомой окружности равенъ половинѣ разстоянія между  $AB$  и  $CD$ , т. е. радиусъ равенъ  $\frac{KZ}{2} = O'Z$ ; центръ, слѣдственно, лежитъ на средней линіи  $EF$ ; чтобы найти его, надо изъ центра данной окружности  $O$  провести дугу радиусомъ, равнымъ суммѣ радиусовъ данной и искомой окружности, ( $OO' = OM + O'M$ ) и въ пересѣченіи со средней линіей  $EF$  найдемъ два искомыя центра.



зад. 135



зад. 136.

136. Пусть  $O$  будетъ центръ данной окружности,  $r$  — ея радиусъ,  $A$  — данная точка и  $r'$  — радиусъ искомой окружности. Требуется опредѣлить центръ  $O'$  этой послѣдней. Могутъ быть три главныхъ случая: точка  $A$  можетъ быть внѣ круга  $r$ , на окружности  $r$ , или въ кругѣ  $r$ . Въ эти 3 случая соответственно отвѣчаютъ тому условию, что  $OA > r$ ,  $OA = r$ ,  $OA < r$ , и каждый изъ нихъ подраздѣляется, въ свою очередь, на 3 другихъ, какъ показываетъ слѣдующая таблица:

1-й случай:  $OA > r$ , и  $1^\circ r' < r$ ,  $2^\circ r' = r$ ,  $3^\circ r' > r$ .

2-й случай:  $OA = r$ , и  $1^\circ r' < r$ ,  $2^\circ r' = r$ ,  $3^\circ r' > r$ .

3-й случай:  $OA < r$ , и  $1^\circ r' < r$ ,  $2^\circ r' = r$ ,  $3^\circ r' > r$ .

1-й случай:  $OA > r$  и  $1^\circ r' < r$ . Так как точка  $A$  вне окружности  $r$ , не может приходиться внутри окружности  $r'$ . Сверх того, окружность  $r$  не может быть внутренней по отношению к окружности  $r'$ , вследствие того, что  $r > r'$ , поэтому обе окружности будут касаться извне. Изъ точки  $O$ , как из центра радиусом  $r + r'$  опишем окружность; центр касательного должен находиться на этой окружности; но он должен быть же на расстоянии  $r'$  от точки  $A$ . Поэтому, если из точки  $A$  шлем радиусом  $r'$  другую окружность, которая пересечет, то получатся вообще две точки  $O'$  и  $O''$ , которые могут быть центрами кругов, отвечающих заданию.

Расстояние центров обеих вспомогательных окружностей  $r + r'$  и  $r'$  есть  $OA$ , сумма их радиусов  $r + 2r'$ , их разность  $r$ . Но так как предполагалось, что  $OA > r$ , то для этого случая получаются, стало быть, два решения или только одно или ни одного, смотря по тому, будет ли

$OA < r + 2r'$  или  $OA = r + 2r'$  или  $OA > r + 2r'$ .

1-й случай:  $OA > r$  и  $2^\circ r' = r$ . Так как точка  $A$  вне окружности, а радиусы  $r$  и  $r'$  равны, то обе окружности не могут быть одна внутри другой; след., они будут касательными извне. Радиусом одной изъ вспомогательных окружностей будет  $r + r'$  другой  $r'$ ; сумма же их радиусов составит  $3r$ . Построение, естественное съ предшествующимъ, приводит тоже къ двумъ решениямъ, къ одному или ни къ одному, смотря по тому, будетъ ли

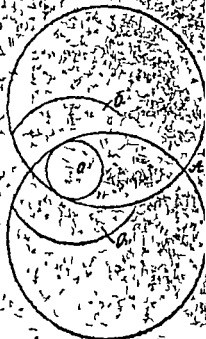
$OA < 3r$ , или  $OA = 3r$  или  $OA > 3r$ .

1-й случай:  $OA > r$  и  $3^\circ r' > r$ . Окружности  $r$  и  $r'$  могут принимать положения, сходные съ теми, какия они занимали въ ихъ предшествующихъ случаяхъ. Стало быть и тутъ получаются решения, одно или ни одного, смотря по тому, будетъ ли

$OA < r + 2r'$ , или  $OA = r + 2r'$ , или  $OA > r + 2r'$ .

Но так как  $r' > r$ , то окружность  $r'$  может вдобавок охватывать окружность  $r$ . Тогда расстояние центров окружностей  $r$  и  $r'$  будетъ  $r' - r$ . Поэтому описываютъ окружность изъ точки  $O$ , в

центра (1-й случай, 1°), радиусом  $g'$  —  $g$ , изъ точки  $A$ , какъ центра, радиусомъ  $g$  описываютъ другую окружность, которая пересѣчетъ первую въ двухъ точкахъ  $O'$  и  $O''$ . Эти точки будутъ центрами двухъ окружностей  $g'$ , касающихся окружности  $g$ . Расстояние центровъ обѣихъ вспомогательныхъ окружностей  $OA$  — сумма ихъ радиусовъ будетъ  $g' + g = 2g'$  —  $g$ , а ихъ разность  $g' - (g' - g) = g$ .



Получимъ  $OA > g$ . Поэтому будутъ двѣ окружности, охватывающія окружность  $g$  или одну, или ни одной, смотря по тому, будетъ ли

$OA < 2g' - g$ , или  $OA = 2g' - g$ , или  $OA > 2g' - g$ .

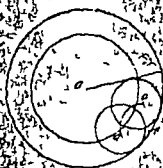
Такимъ образомъ, задача допускаетъ въ настоящемъ случаѣ 3 рѣшенія, или ни одного рѣшенія; 4 рѣшенія будутъ въ томъ случаѣ, когда  $OA < 2g' - g$ , ибо изъ этого вырожденія и подалвно получается еще  $OA < g + 2g'$ ; 3 рѣшенія, когда  $OA = 2g' - g$ , ибо изъ этого же равенства получается еще  $OA < g + 2g'$ . На томъ же основаніи получаются два рѣшенія, когда  $OA$  заключается между  $2g' - g$  и  $2g' + g$ , одно рѣшеніе, когда  $OA = g + 2g'$ , и ни одного, когда  $OA > 2g' + g$ .

2-й случай:  $OA = g$  и  $g' < g$ , или  $g' = g$ , или  $g' > g$ . Такъ какъ точка  $A$  приходится и на окружности  $g$  и на окружности  $g'$ , то она будетъ точкою ихъ касанія; слѣд., искомый центръ  $O'$  находится на  $OA$  и по обѣ стороны точки  $A$  въ разстояніи равномъ  $g'$ .

Поэтому беруть, во-первыхъ, на продолженіи  $OA$  длину  $AO' = g'$  изъ точки  $O'$  какъ изъ центра, — радиусомъ  $g'$  описываютъ окружность, которая во всѣхъ 3-хъ случаяхъ будетъ внѣ окружности  $g$ . Во вторыхъ, по направленію  $AO$  откладываютъ длину  $AO'' = g'$  изъ точки  $O''$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $g'$  описываютъ окружность, которая будетъ облечена окружностью  $g$ , если  $g' < g$ , или же заключитъ окружность  $g$ , если  $g' > g$ . Но если  $g' = g$ , то обѣ окружности совпадаютъ, и не получается никакого рѣшенія.

3-й случай:  $OA < g$  и 1°  $g' < g$ . Такъ какъ точка  $A$  находится въ кругѣ  $g$ , то окружность  $g'$  облечается окружностью  $g$ . Расстояние центровъ окружностей  $g$  и  $g'$  будетъ  $g - g'$ . Изъ точки  $O$  какъ изъ центра радиусомъ  $g - g'$  опишемъ окружность, а

из точки  $A$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $r$  опишемъ другую окружность, которая пересечетъ первую въ  $O'$ . Эти точки будутъ центрами обеихъ окружностей, облученныхъ окружностью.

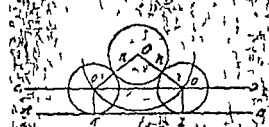


Расстояние между центрами  $O$  и  $O'$  есть  $OA$ , сумма ихъ радиусовъ будетъ  $r + r = 2r$ , а ихъ разность  $(r - r) = 0$ , смотря по тому, будетъ ли  $r < r$  или  $r > r$ . Но  $OA < r$ . Поэтому получаются два решения, или же не будетъ ни одного, смотря по тому, будетъ ли

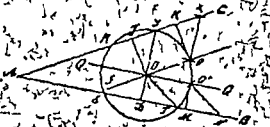
$OA > r - 2r$ , или  $2r - r$ , или  $OA = r - 2r$  или  $2r - r$ , или  $OA < r - 2r$  или  $2r - r$ .

3-й случай:  $OA < r$  и  $2r = r$ . 3-й случай:  $OA < r$  и  $3r = r$ . Задача очевидно, невозможна въ обоихъ этихъ случаяхъ: если  $A$  находится внутри окружности  $r$ , то последняя должна облучать окружность  $r$ , поэтому нужно, чтобы  $r$  было  $< r$ , а этого не быть.

137. Проводимъ  $CD \parallel AB$  на расстоянии данного радиуса  $r$  и изъ данного центра  $O$  проводимъ дугу радиусомъ  $R + r = OO'$ ,  $OO'$  и пересѣкаемъ прямую  $CD$  въ двухъ точкахъ  $O'$  и  $O''$  искомыхъ центрахъ.



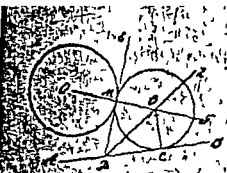
зад. 137.



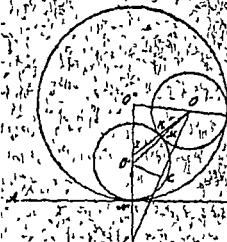
зад. 138.

138. Въ произвольныхъ мѣстахъ на сторонахъ  $BA$  и  $CA$  данного  $\angle A$  строимъ прямоугольные  $\triangle$ -ки,  $KZO'$  и  $NO'M$ , катеты которыхъ  $KZ$  и  $MN$  равны половинамъ данныхъ хордъ, а гипотенузы  $O'Z$  и  $O''N$  равны данному радиусу; искомый центръ долженъ лежать на линияхъ  $GP$  и  $QQ$ , параллельныхъ соответственно сторонамъ  $AC$  и  $AB$ , т. е. это будетъ пересѣченіе ихъ  $O$ ; даннымъ радиусомъ  $O'Z = O''N$  описываемъ изъ точки  $O$  окружность  $RS$  и  $BM$  — даннымъ хордамъ.

139. Пусть  $O$  — центр данной окружности,  $O'$  — искомой.  $AB$  — прямая. Соединим  $O$  и  $M$  (данную точку касания), получим  $OM$ . Проведем  $OE \perp AB$  в точке  $E$ . Проведем  $O'E \perp OE$  в точке  $E$ . Проведем  $O'D \perp OM$  в точке  $D$ . Проведем  $O'D$  в точку  $O'$ . Т. к.  $O'M = O'C$  — искомому радиусу, то искомый центр  $O'$  находится на пересечении линий  $OE$  и  $DZ$ .



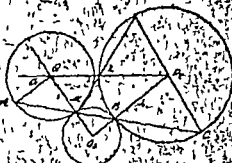
зад. 139.



зад. 140.

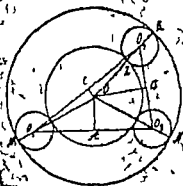
140. В данной точке  $N$  строим перпендикуляр  $NE = MO$  радиусу данной окружности; тогда искомый центр лежит на перпендикуляре  $CO'$  к середине  $C$  линии  $OE$ , т. к.  $O'O = O'E = \text{сумма радиусов}$  данной и искомой окружности; с другой стороны, опустим  $NZ \perp AB$  и, равное  $MO$ , соединим  $Z$  и  $O$  и возведем  $ZO$  в середину  $K$ , получим другой центр  $O'$  на пересечении  $EO'$  и  $AB$ . 2 решения: 1-е — внешнее касание, 2-е — внутреннее.

141. Пусть искомая окружность  $O_2$  касается кр. окружности в данной на ней точке  $M$  и кр. окружности  $O_1$ . Так как центры касательных окружностей и точка касания лежат на одной прямой, то искомый центр лежит в пересечении прямых  $O_1M$  и  $O_2B$ . Прямая  $O_1M$  известна и потому задача приводится к определению положения точки  $B$ . Проведем прямую через точки  $M$  и  $B$  и касание точки  $B$  сводим к определению точки  $C$ . Выведем следствие из следующего чертежа:  $\angle O_1MA = \angle O_2MB$ , как вертикальные,  $\angle O_2MB = \angle MBO_2$ , ибо  $\triangle MO_2B$  — равнобедренный,  $\angle MBO_2 =$

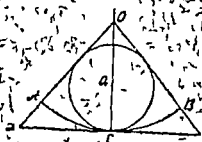


$\angle O_1BC = \angle O_2BC = O_2CB$ , ибо  $\triangle O_2BC$  — равнобедренный. Этих равенств следует, что  $\angle O_1MA = \angle O_2CB$  и, след.,  $O_1M \parallel O_2C$ . Последнее следствие указывает, что для решения задачи надо вести  $O_2C \parallel O_1M$ , точку  $M$  соединить с  $C$ , полученную точку соединить с  $O_2$ ; прямая  $O_1M$  и  $O_2B$  определят точку  $O_3$ . Чтобы доказать, что окружность проведенная из центра  $O_3$  радиусом  $O_3M$  будет исконая, докажем, что  $O_3M = O_3B$ . Из чертежа видно  $\angle O_1MA = \angle O_3MB$ ,  $\angle O_2BC = \angle O_3BM$ ,  $\angle O_1MA = \angle O_2CB$  и  $\angle O_2CB = \angle O_3BC$ . Из этих равенств выходит, что  $\angle O_3MB = \angle O_3B$  потому  $MO_3 = BO_3$ . Это значит, что окружность радиуса  $O_3M$  идет через точки  $M$  и  $B$  и коснется окружностей  $O_1$  и  $O_2$ . Продолжив  $O_2C$  и соединив полученную точку  $D$  с  $M$  пересечении окружности  $O_2$  и прямой  $DM$  находим новую точку. Если продолжим прямую  $O_2Z$  до пересечения в точку  $Q$  с прямой  $O_1M$ , то  $Q$  будет центр новой окружности, которая касается  $O_1$  и  $O_2$  внутренне, касание, а к окружности  $O_3$  касается в точке  $Z$ . Задача имеет два решения соответственно внутреннему и внешнему касанию окружностей, и всегда возможно. Когда точка  $M$  есть точка касания общей касательной к кругам  $O_1$  и  $O_2$ , радиусы  $O_1M$  и  $O_2B$  выходят параллельными, тогда получается только одно решение.

142.  $O_1, O_2, O_3$  суть центры трех данных окружностей.  $O$  центр искомой;  $OO_1 = OO_2 = OO_3$  и поэтому, искомый центр находится на пересечении перпендикуляров  $OA, OB, OC$  к диаметрам  $A, B, C$  прямых  $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1$ ; это случай внешнего касания; если же мы из найденного центра  $O$  опишем окружность радиусом  $OO_3 + O_3K = OZ + ZK = OZ + 2O_3Z$ , то получим след внутреннего касания.



зад. 142.

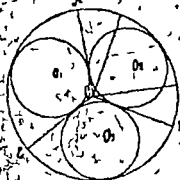


зад. 143.

143. Разделим дугу  $AB$  пополам в точке  $C$  и проведем касательную в этой точке  $DE$ , продолжим  $OA$  и  $OB$  до пересечения с  $DE$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Тогда  $OD = OE$  и  $OC \perp DE$ . Пусть  $OC = r$ ,  $OD = x$ ,  $OE = y$ . Тогда  $x^2 = r^2 + y^2$  и  $y^2 = r^2 + x^2$ . Сложив эти уравнения, получим  $x^2 + y^2 = 2r^2 + x^2 + y^2$ , что верно только при  $x = y$ . Следовательно,  $OD = OE$  и  $OC \perp DE$ . Пусть  $OC = r$ ,  $OD = x$ ,  $OE = y$ . Тогда  $x^2 = r^2 + y^2$  и  $y^2 = r^2 + x^2$ . Сложив эти уравнения, получим  $x^2 + y^2 = 2r^2 + x^2 + y^2$ , что верно только при  $x = y$ . Следовательно,  $OD = OE$  и  $OC \perp DE$ .

тогда задача приводится к вписыванию окружности в  $\triangle ABC$ , что уже известно.

144. Проводим три радиуса  $OA, OB, OC$  образующие три равных сектора с углами при точке  $O$  по  $120^\circ$ , теперь задача сводится к вписыванию в каждый сектор окружности, см. 143.



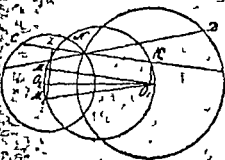
зад. 144



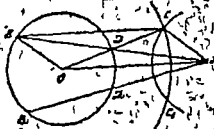
зад. 145

145. Через точку  $M$  проходит хорда  $AB$ ; согласно условию  $MA = a$ ; преобразуем это равенство:  $(NB + MN) - (NA - NM) = a$ ,  $NB + MN - NA + NM = a$ , а т. е.  $NB - NA = a - 2MN$ , откуда  $MN = \frac{a}{2}$ ; итак,  $\triangle MNO$  легко построить по катету  $MN = \frac{a}{2}$  по гипотенузу  $MO$ ; построивши его, продолжим  $MN$  в обе стороны до пересечения с окружностью, и получим искомую хорду  $AB$ .

146. Из данных центров  $O_1$  и  $O_2$  опускаем перпендикуляры  $O_1K$  и  $O_2Z$  на искомую сѣкующую  $CD$ , затем из  $O_1$  проводим  $O_1M \parallel CD$ ; тогда получим прямоугольный  $\triangle O_1O_2M$ , в котором гипотенуза  $= O_1O_2$ , а катет  $O_1M = KZ = \frac{CD}{2}$  (половина данной длины); этот  $\triangle O_1O_2M$  легко построить; надо только из середины линии  $O_1O_2$  описать окружность радиусом  $\frac{O_1O_2}{2}$ ; но тогда получатся два  $\triangle$ -ка  $O_1O_2M$  и  $O_1O_2M_1$ ; теперь через данную точку  $N$  проведем  $CD$  и  $C_1D_1 \parallel O_1M$  и  $O_1M_1$  получим два искомых положения сѣкующей, удовлетворяющих условию.



зад. 146.

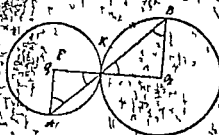


зад. 147.



147. Дана точка  $A$  провести окружность  $AB$  так, чтобы  $AD = DB$ , соединим  $O$  с  $A$ , из  $O$  радиусом  $2OD$  проведем дугу, пересечем ее дугой, проведенной из точки  $A$  радиусом  $OD$ , пересечении найдем точку  $C$ , через  $C$  проведем  $CB \parallel AO$  найдем точку  $B$ , соединим теперь  $B$  с  $A$ , получим искомую хорду  $AB$ , в которой  $AD = DB$ ; доказательство вытекает из того, что фигура  $ABCO$  есть параллелограмм. Задача возможна только тогда, когда  $\angle AOC < \angle AC + CO$  или когда  $\angle AOC < 3OD$ ; в первом случае, когда  $\angle AOC < 3OD$ , имеем два решения:  $\angle AB$  и  $\angle AB$  соответствующим пересечениям дуг  $C_1$  и  $C_2$ ; во втором случае, когда  $\angle AOC = 3OD$ , имеем только одно решение, т.е. искомая окружность проходит через центр.

148. Требуется доказать, что  $K \cdot B = K \cdot A$ ;  $\triangle KB_1O$  и  $\triangle KAO$  — равнобедренные, и поэтому  $\angle KB_1O = \angle O_1KB = \angle O_1K$  ( $KO_1$  вертикальные)  $= \angle KAO$ , следовательно  $\angle BO_1K = \angle AOK$ , а потому  $AK = KB$ .



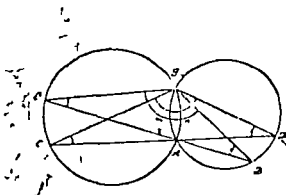
зад 148a



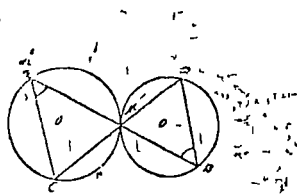
зад 148b

148a.  $AB = CD$  по условию, и обе проходят через данную внутри круга точку  $M$ ; доказать, что  $MB = MC$  и  $MA = MD$ ; проведем  $OM$ , потом  $OE \perp AB$ ,  $OF \perp CD$ ; тогда  $OE = OF$ , как расстояния от центра равных хорд;  $EB = FC$ , (1)  $EA = FD$ ,  $\triangle OME = \triangle OMF$  (общая гипотенуза  $OM$  и катеты  $OE$  и  $OF$ , равны), отсюда имеем:  $ME = MF$ ; прибавляя это равенство к (1) и вычитая от второго почленно, получим искомыми равенства:  $EB + ME = FC + MF$  или  $MB = MC$ ;  $EA - ME = FD - MF$  или  $MA = MD$ .

148b. Доказать, что  $\angle CBD = \angle C_1BD_1$ ; из  $\triangle$ -ов  $CBD$  и  $C_1BD_1$  имеем:  $\angle CBD = 2d_1$  ( $\angle BDC + \angle DCB$ );  $\angle C_1BD_1 = 2d_1$  ( $\angle BD_1C_1 + \angle D_1C_1B$ ). Но т.к.  $\angle BDC = \angle BD_1C_1$ ,  $\angle DCB = \angle D_1C_1B$  (как опирающиеся на одну и ту же дугу  $BmA$  и  $BmA$ , то отсюда следует, что  $\angle BDC + \angle DCB = \angle BD_1C_1 + \angle D_1C_1B$ , а  $\angle CBD = \angle C_1BD_1$ .



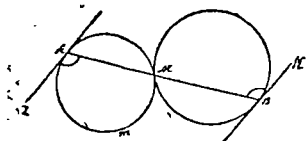
зад. 148b.



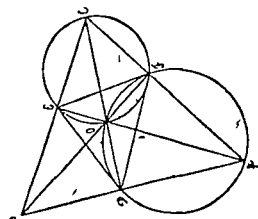
зад. 149.

149. Доказать, что  $AC \parallel BD$ ; на основании № 148  $\widehat{CnM} = \widehat{MmD}$ ; и  $\angle CAM = \angle DBM$ ; т. к. накресть-лежащие углы (внутренние) равны, то  $AC \parallel BD$ .

150. На основании задачи № 148,  $\widehat{BnM} = \widehat{MnA}$ , и  $\angle ZAB = \angle KBA$ , как углы одного измерения; а если внутренние накресть-лежащие углы равны, то  $AZ \parallel BK$ .



зад. 150

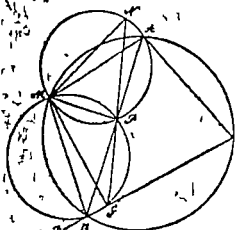


зад. 151.

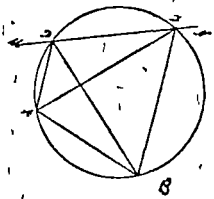
151. В треугольнике  $ABE$  проведены высоты  $AE$ ,  $BF$  и  $CD$ , основания которых  $D, E, F$  соединены прямыми линиями. Так как  $\angle OEC = \angle OFC = d$ , то  $\angle OEC + \angle OFC = 2d$ , почему  $\angle EOF + \angle ECF = 2d(4-2) - 2d = 2d$ , следовательно, около четырехугольника  $FOEC$  можно описать окружность. Точно также можно описать окружность около четырехугольника  $ADOF$ . Мы видим, что  $\angle OCE = \angle OFE$ ,  $\angle OFD = \angle OAD$ , так как они опираются на одни и те же дуги, кроме того  $\angle OAD$  и  $\angle OCE$  равны, так как стороны их взаимно перпендикулярны, почему  $\angle OFD = \angle OFE$ , т. е.  $OF$  будет биссектрисой  $\angle DFE$ .

152. Предположим, что около  $\triangle ABC$  описана окружность и из произвольной ее точки  $M$  опущены перпендикуляры  $MN$ ,  $MP$  и  $MG$ . Требуется доказать, что  $MPG$  прямая. Так как в  $\square APMN$   $\angle MNA + \angle APM = 2d$ , то около него можно описать окружность (см. геом. Кис. § 107, 2°). Около  $\square BMPG$  также можно описать

окружность, т. е.  $\angle BGM = \angle BPM = d$ . Проведем прямые  $MA$ ,  $NP$  и  $PG$ , заметим  $\angle MBD + \angle MBC = 2d$  и  $\angle MBG = \angle MAN$ . Так как треугольники  $BMG$  и  $AMN$  прямоугольные, то, следовательно,  $\angle BMG = \angle AMN$ . Но  $\angle AMN = \angle APN$  и  $\angle BMG = \angle BPG$ , как опирающиеся на одну и ту же дугу (см. Кис. геом. § 151, 1°), откуда  $\angle APN = \angle BPG$ , и следовательно  $NPG$  прямая.



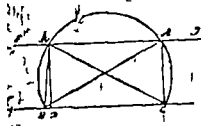
зад. 152.



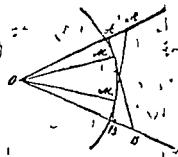
зад. 153

153. Для того, чтобы найти на бесконечной прямой  $MN$  такую точку  $D$ , из которой отрезок  $AB$  был бы виден под углом  $\alpha$ , строим на  $AB$  дугу, вмещающую угол  $\alpha$  (см. геом. Кис. § 165). Дуга эта пересечет прямую  $MN$  в двух точках  $D$  и  $D'$ , которые и будут искомыми точками, так как  $\angle ADB = \angle AD'B = \alpha$ .

154. На произвольной прямой откладываем часть  $BC$ , равную данному основанию, а затем на  $BC$  описываем дугу, вмещающую данный  $\angle A$ . Но нам известно, что всякая точка этой дуги удовлетворяет вопросу, т. е. треугольников по данному основанию и данному углу, ему противолежащему, можно построить бесчисленное множество, потому что всякая точка этой дуги, соединенная с точками  $B$  и  $C$ , дает требуемый треугольник, в котором  $\angle BAC$  противолежащий основанию  $BC$ , равен данному углу, как опирающийся на дугу, вмещающую данный угол. Так как вопрос ограничен еще тем условием, что искомый треугольник должен иметь высоту, равную данной высоте, то мы должны на расстоянии  $AD$ , равном данной высоте, от прямой  $BC$  провести линию  $EF \parallel BC$ , которая проходит через окружность, как секущая, пересечь ее в двух точках  $A$  и  $A'$ , которые соединив с точками  $B$  и  $C$ , получим 2 треугольника  $ABC$  и  $A'BC$ , удовлетворяющие требуемым условиям; следовательно они есть искомые.



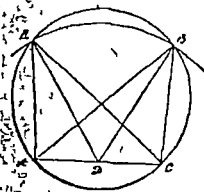
зад. 154.



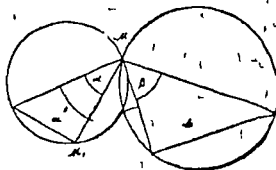
зад. 155.

155. Положимъ, что данъ секторъ  $AOB$ , въ которомъ требуется провести касательную  $AB$  данной длины. Задача сводится къ решению зад. 154, такъ какъ здѣсь требуется построить  $\triangle AOB$ , въ которомъ дано основание  $AB$ , высота  $OM$  и уголъ при вершинѣ  $AOB$ .

156. Чрезъ точки  $A$  и  $C$  прямой  $AC$  проводимъ окружность, вписанную данный уголъ  $ABC$  и изъ  $D$  середины линіи  $AC$  радиусъ  $BD$  равнымъ медианѣ, описываемъ окружность, которая пересѣчетъ первую окружность въ двухъ точкахъ. Соединяя эти двѣ точки съ  $A$  и  $C$ , получимъ два искомыя треугольника  $ABC$  и  $AB'C$ .



зад. 156.

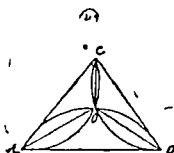


зад. 157.

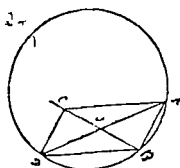
157. На прямой  $a$  строимъ дугу, вмѣщающую уголъ  $a$ , и на прямой  $b$  дугу, вмѣщающую уголъ  $b$ . Точки  $M$  и  $M'$  пересѣченія этихъ двухъ дугъ будутъ искомыми. Если окружности пересѣются, то будутъ 2 рѣшенія; если коснутся—одно, и если не коснутся, и не пересѣкутся, то ни одного.

158. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть  $O$  будетъ искомая точка.  $\angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 4d$ , а такъ какъ,  $\angle AOB$ ,  $\angle AOC$  и  $\angle BOC$  должны быть равны, то отсюда слѣдуетъ, что каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться  $\frac{4}{3}$  прямого угла. Поэтому достаточно описать на каждой изъ сторонъ треугольника сегменты, вмѣщающие  $\frac{4}{3}$  прямого угла. Задача будетъ невозможна, если одинъ изъ угловъ треугольника больше  $\frac{4}{3}$  прямого угла, ибо

тогда все 3 сегмента пересекутся в точке  $O'$  вне  $\triangle ABC$ , а одна из углов оба вычитать остальных.



зад 158



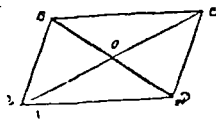
зад 159

159. Предположим, что искомым  $\triangle$  будет  $\triangle ABC$ , в нем даны  $\angle CAB$ , высота  $AE$  и медиана  $AF$ . Продолжив медиану, равное расстояние до точки  $D$  и соединив полученную точку с концами основания  $C$  и  $B$ , получим параллелограмм  $ABDC$ . В  $\triangle ABD$  сторона  $AD=2AF$ , а  $\angle ABD=2\alpha-\angle CAB$ . Настроим окружность, вписанную  $\angle ABD$ , а из  $A$  описываем дугу радиусом, равным высоте  $AE$ , в которой через точку проводим касательную  $FB$ , и, отложив  $CF=FB$ , получим искомый  $\triangle ABC$ . В самом деле  $AF=$  данной медиане и  $AE=$  данной высоте, а  $\angle CAB=$  данному углу.

160. Положим, что  $\triangle ABC$ , в котором дано основание  $BC$ ,  $\angle ABC$  и  $\angle BDC$  построен. Мы замечаем, что задача была решена, если бы было определено положение точки  $D$ . Соединив  $E$  середину  $BC$  с  $D$ , видим, что  $DE \parallel AB$ , кроме того точка лежит в пересечении линии  $DE$  с окружностью, проведенной через 3 точки  $BDC$ , т. е. вписанной данный  $\angle BDC$ . Из этого вытекает, что для того, чтобы построить  $\triangle$  по данным 3 элементам, должно построить  $\angle ABC$ , равный данному, через точку  $E$  середину основания  $BC$  проводим линию  $DE \parallel AB$  и на ней строим окружность, вписанную данный угол  $\angle BDC$ . Пересечение этой окружности с прямой  $ED$  соединяем с точкой  $C$  и получаем ее до пересечения со стороны  $AB$   $\angle ABC$ . Полученный  $\triangle ABC$  будет искомым.



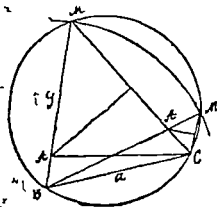
зад 160.



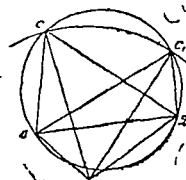
зад 161

161. Въ параллелограммѣ  $ABCD$  даны: диагональ  $AC$ , диагональ  $BD$  и  $\angle BAD$ .  $\triangle ABD$ , въ которомъ даны основанія  $BD$ , при вершинѣ  $BAD$  и медиана  $AO (=1/2 AC)$ , проведенная къ основанію, мы умѣемъ построить (см. рѣш. зад. 156). Проведя изъ  $B$   $BC \parallel AD$  и  $DC \parallel AB$ , получимъ искомый параллелограммъ.

162 Пусть  $\triangle ABC$  будетъ искомый. Чтобы принять во вниманіе данную сумму боковыхъ сторонъ, продолжимъ  $BA$  и отложимъ  $AS$ ; проведя  $MC$ , получимъ вспомогательный  $\triangle BMC$ . Если мы построимъ этотъ  $\triangle$ , то затѣмъ легко построить и  $\triangle ABC$ . Построеніе  $\triangle BMC$  сводится къ нахожденію точки  $M$ . Замѣтивъ, что  $\triangle BMC$  равнобедренный ( $BM=BC$ ) и слѣдов.,  $\angle M=1/2 \angle A$  (т. е.  $\angle M + \angle C = \angle A$ ), мы видимъ, что  $M$  должна быть удовлетворяема условіямъ: 1) она удалена отъ  $B$  на разстояніе  $S$ . 2) изъ нея видна конечная прямая  $BC$  видна подъ угломъ равнымъ  $1/2 \angle A$ . Отбросивъ 2-е условіе, мы получимъ безчисленное множество точекъ  $M$ , лежащихъ на окружности, описанной изъ  $B$  радиусомъ равнымъ  $S$ . Отбросивъ 1-е условіе, мы получимъ также безчисленное множество точекъ  $M$ , лежащихъ на дугѣ сегмента, построеннаго на  $BC$  и вмѣщающаго  $\angle = 1/2 \angle A$ . Такимъ образомъ нахождение для  $M$  сводится къ построенію двухъ геометрическихъ мѣстъ, изъ которыхъ каждое мы построить умѣемъ. Задача окажется невозможной, если эти геометрическія мѣста не будутъ имѣть общихъ точекъ; задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія, смотря по тому, сойдутся ли или же пересѣкаются эти мѣста.



зад. 162

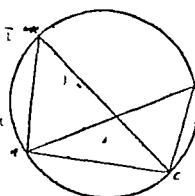


зад. 163

163. Даны диагонали  $AC$  и  $BD$ , стороны  $AB$  и  $AD$  и  $\angle BCD$ . Строимъ  $\triangle ABD$ , въ которомъ даны 3 стороны  $AB$ ,  $BD$  и  $AD$ , затемъ на диагонали  $BD$  строимъ сегментъ, вмѣщающій данный уголъ  $\angle BCD$ , и изъ  $A$  радиусомъ, равнымъ диагонали  $AC$ , описываемъ дугу. Точка  $C$  пересѣченія этой дуги съ сегментомъ и будетъ четвертой вершиной искомага четырехугольника  $ABCD$ .

164. Предположим, что задача решена, т. е. что линия будет прямой, при чем  $DE = \text{данной длины}$ . Проведем  $CF$ , тогда  $CF = DE$  и  $\perp BD$ . Почему окружность, описанная из  $C$  радиусом, равным  $CF = DE$ , будет касательна к  $BD$ . Отсюда следует построение, а именно: из точки  $C$  радиусом, равным данной длине, описываем дугу, а из точки  $B$  к ней касательную, на которую из точки  $A$  опускаем перпендикуляр  $AE$ . Эта линия  $AE$  будет искома.

зад. 164



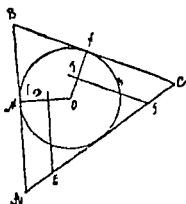
зад. 165

165. Даны 2 угла  $a$  и  $b$ . В данный круг вписываем  $\triangle ABC$ , равный данному  $\angle a$ , затем продолжаем его стороны пересечения с окружностью в точках  $A$  и  $C$ , которые соединим прямой. Прямая  $AC$  будет одной стороной треугольника, точка  $C$  стороны  $\triangle ABC$ , равной другому данному  $\angle b$ , и соединим, наконец,  $B$  с  $A$   $\triangle ABC$  и будет искома.

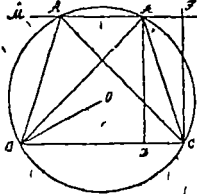
166. Даны  $\angle a$  и  $\angle b$ . Проводим к данному кругу касательную  $AC$  и на ней при какой нибудь точке  $E$  строим  $\angle CED$  равный данному  $\angle a$ , опускаем на сторону  $DE$  перпендикуляр  $CD$ , продолжаем его до пересечения с окружностью в точке  $M$ , наконец, через точку  $M$  проводим касательную  $AB$ . Тогда  $AB$  перпендикулярна к  $MO$  и  $ED$  тоже перпендикулярна к  $M$ ,  $AB$  и  $ED$  параллельны, почему  $\angle BAC = \angle DEG$ . Точно так же строим  $\angle ACB$ , равный другому данному  $\angle b$ . Продолжим стороны  $AB$  и  $BC$  до пересечения в точке  $B$ , найдем искома  $\triangle ABC$ .

167. Чтобы решить эту задачу, вписываем в окружность данного радиуса  $OB = R$   $\angle BAC$ , равный данному, и соединяем  $B$  и  $C$  прямой, затем где нибудь на  $BC$  возставляем перпендикуляр  $CF = h$ , и проводим  $FM \parallel BC$ . Точки пересечения

предъявлять третьи вершины  $A$  и  $A'$  двух равных треугольников  $ABC$  и  $A'BC$ .

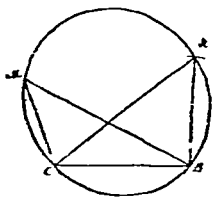


зад 166.

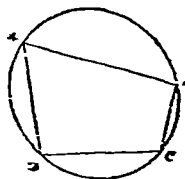


зад 167.

168. Пусть дан  $\angle BAC$  и  $AB+BC=S$ . Для решения этой задачи впишем в данный круг угол  $BMC$ , равный данному углу. Хорда  $BC$  будет равна одной из сторон искомого треугольника. Затем из  $B$  радиусом, равным  $S-BC$ , опишем дугу, которая пересечет окружность в точке  $A$ . Точка  $A$  будет третьей вершиной искомого треугольника  $ABC$ .



зад 168



зад 169.

169. Дана сторона  $AB$  и углы  $C$  и  $D$ . Так как во всяком вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов  $=2d$ , то  $\angle A=2d-\angle C$  и  $\angle B=2d-\angle D$ , поэтому, чтобы вписать в данный круг требуемый четырехугольник, проводим в круг хорду  $AB$ , равную данной, а затем на ней при точках  $A$  и  $B$  строим углы, равные  $2d-\angle C$  и  $2d-\angle D$ , пересечение сторон которых с окружностью определят две другие вершины  $C$  и  $D$  искомого четырехугольника  $ABCD$ .

170. Так как в каждом ромбе треугольники  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $DOA$  равны, то и высоты их  $OZ$ ,  $OM$ ,  $ON$  и  $OP$  равны, почему окружность, вписанная радиусом  $OZ=OM=ON=OP$ , касается всех сторон ромба.



зад. 170

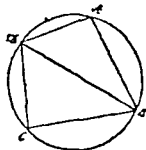
зад 171

171. Если въ данномъ равностороннемъ  $\triangle ABC$  проведемъ 3 высоты  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ , то онъ раздѣлится ими на 3 равные четырехугольника  $AFMC$ ,  $BDMF$  и  $CEMD$ , т. к. въ нихъ стороны  $AE = AF = BF = BD = DC = CE$ , какъ половины равныхъ сторонъ, углы  $\angle BAC = \angle ABC = \angle BCA$  и углы  $\angle MFA = \angle MFB = \angle MDB = \angle MDC = \angle MEC = \angle MEA = d$ . Такъ какъ, въ равностороннемъ треугольникѣ высоты вмѣстѣ съ тѣмъ суть биссектрисами и медианами, а мы знаемъ, что 3 медианы треугольника пересекаются въ одной точкѣ, которая отсѣкаетъ отъ каждой медианы третью часть, считая отъ соответствующей стороны, то  $MF = MD = ME$ . Мы видимъ, что въ четырехугольникѣ  $AFME$  сумма  $AE + FM = AF + EM$ , слѣдовательно можно въ него вписать окружность (см. геом. Кис. § 172, 2°). Точно также мы можемъ вписать окружность въ два остальныхъ четырехугольника. Отсюда слѣдуетъ, что точки касанія этихъ окружностей съ прямыми  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  находятся на равномъ разстоянн отъ центра  $M$  и потому окружности эти касаются въ этихъ точкахъ. Итакъ, чтобы рѣшить эту задачу, проводимъ 3 высоты и въ образовавшиеся 3 четырехугольника вписываемъ три равные круга, (см. геом. Кисел. 182, 2°).

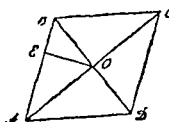
172. Даны стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $AD$  и діагональ  $DB$ . Положимъ, что задача рѣшена, т. е. что четырехугольникъ  $ABCD$  будетъ искомымъ.  $\triangle ABD$ , въ которомъ извѣстны 3 стороны, мы можемъ построить. Въ  $\triangle BCD$  даны стороны  $DB$  и  $BC$  и  $\angle C = 2d - A$  (см. Кис. геом. § 170, 1°), поэтому, чтобы построить  $\triangle BDC$ , мы должны на прямой  $DB$  построить сегментъ, вмѣщающій данны  $\angle C$  (см. геом. Кис. § 165). Описавъ изъ точки  $B$  дугу радиусомъ, равнымъ  $BC$ , точку  $C$  пересѣченія этой дуги съ дугой сегмента соединимъ съ точкой  $D$ . Полученный четырехугольникъ  $ABCD$  будетъ искомымъ.

173. Діагонали  $BD$  и  $AC$  составляютъ биссектрисы угловъ ромба, стало быть, центръ вписаннаго круга находится въ точкѣ  $O$  пересѣченія этихъ діагоналей. Слѣдовательно, перпендикуляръ  $OE$

АВ будетъ радиусомъ вписаннаго круга. Въ прямоугольномъ  $\triangle$  BO известны гипотенуза АВ и соответственная высота ОЕ, по-  
тому можно построить этотъ треугольникъ, послѣ этого легко до-  
строить ромбъ, ибо его полудиagonаля будутъ известны.

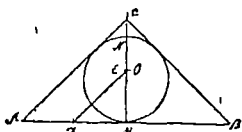


зад. 172.

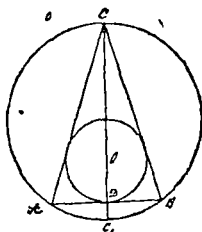


зад. 173.

174. Черезъ какую-нибудь точку М данной окружности про-  
водимъ диаметр MN и къ нему касательную АВ. Затѣмъ при ка-  
кой-нибудь точкѣ D строимъ  $\angle EDM = 45^\circ$ , на сторону DE опу-  
щаемъ изъ центра О перпендикуляръ OF, чрезъ точку F проводимъ  
касательную AC и при точкѣ C строимъ прямую  $\angle ACB$ . Продол-  
живъ сторону CB этого угла до пересѣченія ея въ точкѣ В съ  
прямой АВ, получимъ  $\triangle ABC$ .



зад. 174.

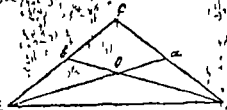


зад. 175.

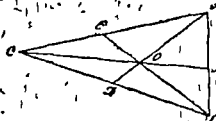
175. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть ABC будетъ  
искомый треугольникъ. Разсматривая фигуру, видно, что для полу-  
ченія  $\triangle ABC$  достаточно возставить въ серединѣ прямой АВ, равной  
данному основанію, перпендикуляръ  $DO = r$ , радиусу вписаннаго  
круга, описать этотъ кругъ и провести къ нему касательныя чрезъ  
окрѣ А и В.

176. Положимъ, что искомый  $\triangle ABC$  построенъ и пусть О  
будетъ точка пересѣченія его двухъ данныхъ медіанъ Аа и Вb.  
Мы знаемъ, что точка пересѣченія 3 медіанъ треугольника нахо-  
дится на  $\frac{1}{3}$  каждой изъ нихъ, считая отъ соответственной стороны,  
чѣму  $AO = \frac{2}{3}Aa$  и  $BO = \frac{2}{3}Bb$ , слѣдовательно, мы можемъ постро-

нѣ  $\triangle AOB$ , зная 3 его стороны; направление сторонъ  $AC$  и  $BC$  опредѣлятся точками  $c$  и  $a$ , которыя найдемъ, продолживъ  $AO$  на разстояніи  $Oa = \frac{1}{2}AO$  и  $BO$  на разстояніи  $Ob = \frac{1}{2}BO$ .



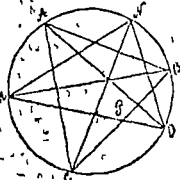
зад. 176.



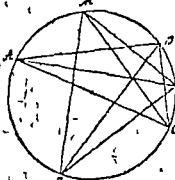
зад. 177.

177. Предположимъ, что  $\triangle ABC$  искомый и  $O$  точка пересѣченія его трехъ медианъ  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ . Въ треугольникѣ  $COB$  намъ известны двѣ его стороны и медиана, проведенная къ третьей сторонѣ, а именно:  $CO = \frac{2}{3}CF$ ,  $OB = \frac{2}{3}BE$  и  $OD = \frac{1}{3}AD$ ; слѣдовательно мы можемъ построить этотъ треугольникъ (см. зад. 99) тогда, опредѣлится сторона  $CB$  искомага треугольника и направление медианы  $AD$ , длина которой известна. Соединяя конецъ ея  $A$  съ вершинами угловъ  $C$  и  $B$ , найдемъ искомый треугольникъ  $ABC$ .

178. Предположимъ, что задача рѣшена, и что вписанъ въ окружность такой  $\triangle MNO$ , биссектриссы котораго  $AO$ ,  $BM$  и  $CN$  при продолженіи, встрѣчаютъ окружность въ данныхъ точкахъ  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Соединимъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Т. к.  $AO$  есть биссектрисса  $\angle O$  и вслѣдствіе того  $\angle O$  ею дѣлится пополамъ, а мы знаемъ, что равные вписанные углы опираются на равныя дуги, то дуга  $AM = \text{дугѣ } AN$ . Точно также дуга  $OB = \text{дугѣ } BN$  и дуга  $MC = \text{дугѣ } CO$ . Рассмотримъ теперь углы  $APC$  и  $APB$ .  $\angle APC$  измѣряется полусуммою  $AM + MC + BO$ , а  $\angle APB = \text{полусуммѣ } AN + NB + CO$ , слѣдовательно,  $\angle APC = \angle APB$ , т. е.  $AO \perp BC$ . Такимъ же образомъ докажемъ, что  $BM \perp AC$  и  $CN \perp AB$ . Отсюда слѣдуетъ, что для того, чтобы вписать требуемый  $\triangle$ , соединяемъ данныя точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  и въ полученномъ  $\triangle ABC$  проводимъ высоты, пересѣченія которыхъ съ окружностью опредѣляютъ вершины искомага треугольника  $MNO$ .



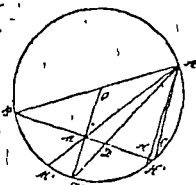
зад. 178.



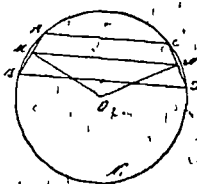
зад. 179.

179. Положимъ, что задача рѣшена и что вписанъ въ окружность такой  $\triangle MNO$ , высоты котораго  $NA$ ,  $MC$  и  $OB$  при продолженіи встрѣчаютъ окружность въ данныхъ точкахъ  $A, B, C$ . Соединимъ точки  $A, B$  и  $C$ . Т. к.  $AN \perp OM$  и  $OB \perp MN$ , то  $\angle ANM = \angle MOB$ , но  $\angle ANM = \angle ACM$  (см. геом. Кис. § 156, 1°) и  $\angle MOB = \angle MCB$ , слѣдовательно,  $\angle ACM = \angle MCB$ , т. е.  $MC$  есть биссектрисой  $\angle ACB$ . Точно также докажемъ, что  $BO$  есть биссектриса  $\angle ABC$  и  $AN$  есть биссектриса  $\angle CAB$ . Отсюда, слѣдующее построение: соединивъ точки  $A, B$  и  $C$ , получимъ  $\triangle ABC$ ; затѣмъ проведемъ биссектрисы угловъ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ  $M, N$  и  $O$ . Соединивъ точки  $M, N$  и  $O$  прямыми, получимъ искомый треугольникъ.

180. Предположимъ, что задача рѣшена, что  $\triangle ABC$  искомый, и что точки  $M, D, H$  суть точками пересѣченія медианы  $AM$ , биссектрисы  $AD$  и высоты  $AH$  съ описаннымъ кругомъ, центра  $O$ . Прямая  $OM$ , соединяющая центръ  $O$  съ серединою хорды  $BC$ , перпендикулярна къ этой хордѣ, т. е. будетъ  $\parallel AH$ ; эта же прямая дѣлитъ дугу  $BC$  въ точкѣ  $D'$  на 2 равныя части. Отсюда слѣдуетъ построение: чрезъ 3 данныя точки  $M, D, H$ , проводимъ окружность, затѣмъ проводимъ радіусъ  $OD'$  и хорду  $AH' \parallel OD'$ . Хорда  $AM'$  пересѣкаетъ  $OD'$  въ точкѣ  $M$ , чрезъ которую проводимъ хорду  $BC'$ , перпендикулярную къ  $OD'$  или  $AH'$ .



зад. 180



зад. 181

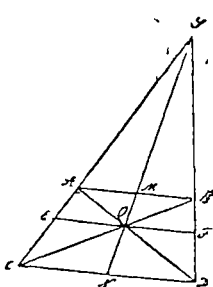
181. Положимъ, что задача рѣшена, и пусть  $AC$  и  $BD$  будутъ искомыя параллельныя линіи. Проводимъ  $AB$  и  $CD$ ; получаемъ трапецію  $ABCD$ , въ которой прямая  $MN$ , соединяющая середины сторонъ  $AB$  и  $CD$ ,  $= \frac{AC+BD}{2}$  или  $= \frac{1}{2}$ . Слѣдовательно, точка  $N$  находится на окружност, описанной изъ точки  $M$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $\frac{1}{2}$ . Кромѣ того, хорды  $AB$  и  $CD$  равны, какъ стягива-

юция равны дуги; следовательно, они одинаково удалены от центра, и точка N находится также на окружности, описанной из центра O радиусом OM. Точка N будет тогда определена. Если теперь провести MN, а чрез точки A и B—линии AC и BD, параллельные этой прямой, то получатся искомые хорды.

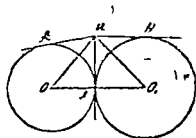
*Примечание.* Дуги, описанные радиусами MN и OM, пересекаются во второй точки N', и задача допускает два решения; но если придать MN наибольшее значение, которое очевидно будет  $MO + ON$ , то задача дает лишь одно решение, и параллельные линии AC и BD находятся в равном расстоянии от центра, а именно  $40M$ ; задача была бы невозможна, при  $l > 40M$ . При  $l = AB$  или  $\frac{l}{2} = AM$ , параллельная линия AC сводится к точке, и задача уже невозможна. Итак, вопрос возможен лишь при  $AB < l < 40M$ , или в крайнем случае при  $l = 40M$ .

189. Продолжим в трапеции ABDC не параллельные стороны до пересечения в точке S и проведем диагонали AD и BC, которых точка пересечения будет O. Проведем через O прямую EF || AB, получим подобные треугольники AEO и ACD и подобные треугольники BOF и BCD, почему  $\frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BD} = \frac{OF}{CD}$ , откуда  $\frac{EO}{CD} = \frac{OF}{CD}$ , почему  $EO = OF$ . Но мы знаем, что прямые (SC, SN, SD), исходящие из одной точки (S) и пересекаемые рядом параллельных прямых (AB, EF, CD), разбиваются ими на пропорциональные части, поэтому  $\frac{AM}{MB} = \frac{EO}{OF} = \frac{CN}{ND}$ , откуда  $AM = MB$  и  $CN = ND$ . Таким образом прямая SO, соединяющая точку пересечения непараллельных сторон трапеции S с точкою пересечения ее диагоналей O, делит параллельные стороны AB и CD в точках M и N пополам.

190. Дана касательная AMB к 2 окружностям O и O'. Требуется доказать, что  $2ON : AB = AB : 2NO$ . Соединив O с O' и проводя общую касательную MN, видим, что  $\angle AMO = \angle OMN$  и  $\angle NMO = \angle BMO'$ , почему  $\angle AMO + \angle BMO' = \angle OMN + \angle NMO' = d$  и, следовательно,  $\triangle OMO$  прямоугольный. Но  $MN \perp OO'$ , почему  $ON : MN = MN : NO$  или  $2ON : 2MN = 2MN : 2NO$  или так как  $MN = AM = MB$ ,  $2ON : AB = AB : 2NO$ , что и требовалось доказать.

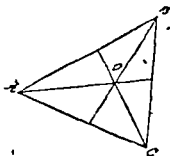


зад 189

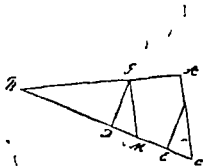


зад 190

191. Пусть стороны треугольника будут  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ : отрезки медиан  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  будут соответственно  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . Имеем  $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ , почему  $\frac{2}{3} m_a = a' = \frac{1}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ , откуда  $9a'^2 = 2b'^2 + 2c'^2 - a^2$ . Точно также получим  $9b'^2 = 2a'^2 + 2c'^2 - b^2$  и  $9c'^2 = 2a'^2 + 2b'^2 - c^2$ . Складывая эти три равенства получим:  $a^2 + b^2 + c^2 = 3(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ .



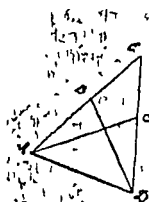
зад 191



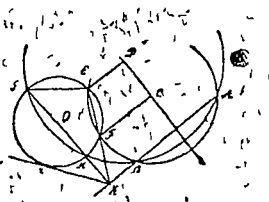
зад 192.

192. Проведем  $GM \parallel AC$ ; найдем, что прямоугольные треугольники  $DGM$  и  $EFC$ , у которых  $DG=EF$  и  $\angle DMG = \angle ECF$ , равны, почему  $DM=EC$ . Кроме того мы имеем  $BD:DG=BG:DM$ , но  $DM=EC$ , почему  $BD:DG=DG:EC$ , что и требовалось доказать

193. Проведем  $BC$ ,  $BD$ ,  $AC$  и  $AD$ . Из равенства  $EA \cdot EB = ED \cdot EC$  получается  $\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EB}$   $\angle$ -ки  $\triangle AEC$  и  $\triangle BED$  подобны, так как у них по равному углу между пропорциональными сторонами, а  $\angle$ -ы  $EAC$  и  $EBC$  равны; потому, если на линии  $BC$  описать сегмент, вмещающий  $\angle EAC$ , то дуга этого сегмента пройдет также через точку  $D$ . Стало быть, все четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  находятся на одной окружности



зад. 193.



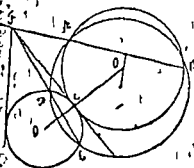
зад. 194.

194. Пусть кругъ, проведенный чрезъ  $A$  и  $B$  и имѣющій центръ въ  $C$ , пересѣкаетъ кругъ  $O$  въ точкахъ  $G$  и  $H$ . Пусть хорда  $EF$  встрѣчаетъ  $AB$  въ точкѣ  $N$ ; проведемъ прямую  $GK$  и докажемъ, что она пройдетъ чрезъ  $N$ . Если прямая  $GK$  пересѣкаетъ кругъ  $O$  въ точкѣ  $H'$ , а кругъ  $D$  въ  $H''$ , то на основаніи § 218 и 219, для круга  $O$  имѣемъ:  $GK \cdot H'K = EK \cdot FK$ , а для круга  $D$  получимъ:  $GK \cdot H''K$ . Прямая  $H'K$  и  $H''K$  считаются по прямой  $GK$ , поэтому точки  $H'$  и  $H''$  пересѣченія круговъ  $O$  и  $D$  съ  $GK$  сливаются между собой, и, слѣдовательно, составляютъ также общую ихъ точку пересѣченія, находящуюся на свѣвающей  $GK$ .

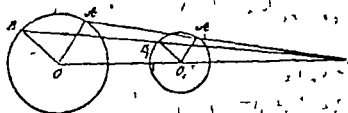
*Слѣдствіе.* Касательная  $KZ$ , проведенная изъ общей точки  $K$  пересѣченія хорды круговъ, въ кругу  $O$  будетъ въ той же точкѣ  $Z$  касательною къ кругу, проходящему чрезъ  $A$  и  $B$  и касательному съ  $ZK$  въ точкѣ  $Z$ . Въ самомъ дѣлѣ  $KZ^2 = KG \cdot KH$ , но  $KG \cdot KH = AK \cdot BK$ , слѣдовательно,  $KZ^2 = AK \cdot BK$ , а точки  $Z$ ,  $A$  и  $B$  принадлежатъ кругу, проходящему чрезъ  $A$ ,  $B$  и касательному съ  $ZK$  въ точкѣ  $Z$ .

195. Пусть  $A$  и  $B$  двѣ данныя точки и  $O$  центръ даннаго круга. Положимъ, что задача рѣшена, и пусть  $O'$  означаетъ центръ искомаго круга, касающагося  $O$  въ точкѣ  $C$ . Этотъ центръ  $O'$  лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины  $AB$  и на прямой  $OCO'$  проходящей чрезъ точку  $C$ ; поэтому рѣшеніе задачи сводится на опредѣленіе точки  $C$ . Но проведенная чрезъ точку  $C$  касательная къ кругу  $O$ , будетъ касательною и къ искомому кругу, откуда видимъ, что она пересѣчетъ  $AB$  въ точкѣ  $F$  пересѣченія  $AB$  съ хордою  $ED$ , полученною отъ сѣченія какого нибудь круга, проходящаго чрезъ  $A$  и  $B$ , съ кругомъ  $O$ . Слѣдовательно, для рѣшенія задачи, беремъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ середины  $AB$ , какую нибудь точку, чтобы кругъ, описанный изъ нея какъ центра, пересѣкъ данный кругъ  $O$  въ точкахъ  $E$  и  $D$ ; изъ точки

пересечения  $AB$  с  $ED$  проводим касательные  $FC$  и  $FC'$  к  $\text{кргу}$   $O$  и чрез 2 точки  $A$  и  $B$  и каждую из  $C, C'$  проводим окружности, которые и будут искомыми. Задача имеет 2 решения, для точки  $A$  и  $B$  равно отстоять от центра  $O$ , то, прямые  $AB$  и будут параллельны, и для решения достаточно будет провести к  $\text{кргу}$   $O$  касательные параллельные  $AB$  и чрез их точки касания и точки  $A$  и  $B$  провести  $\text{кргы}$ . Задача будет невозможна, и одна данная точка будет вне  $\text{крга}$ , а другая внутри его.



зад. 195.



зад. 196.

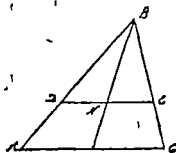
196. Пусть  $OO'$  будут линия центров и радиус  $OA \parallel O_1A_1$ ,  $OB \parallel O_1B_1$ . Проведем линию  $AA'$  и затем продолжив ее до пересечения с  $OO'$ , в точке  $C$ , докажем, что линия  $BB'$ , при продолжении ее, пересечет линию центров в той же точке  $C$ . Для доказательства соединим  $B$  и  $B'$  с  $C$  и докажем, что линия  $BC$  и  $B'C$  сливаются. В  $\triangle AOC$  и  $A_1O_1C$  сторона  $AO \parallel A_1O_1$ , следовательно, эти треугольники подобны (см. геом. Кис. § 178), почему  $OC : O'C = OA : O_1A_1$ . Т. к.  $OA = OB$  и  $O_1A_1 = O_1B_1$ , то будем иметь  $OC : O'C = OB : O'B'$ , и вследствие равенства  $\angle BOC$  и  $B_1O_1C$ , выводим, что  $\triangle BOC$  и  $B'O_1C$  подобны, т. е. что  $\angle BCO = \angle B_1CO_1$ , и следовательно, линия  $BC$  сливается с  $B'C$ . Итак, мы видим, что продолжение линии  $BB'$ , пересечет линию центров в точке  $C$ .

197. Пусть  $BM$  будет медиана относительно стороны  $AC$  и линия  $DE \parallel AC$ . Требуется доказать, что  $DN = EN$ . Мы знаем, что, прямые, исходящие из одной точки и пересекаемые рядом параллельных прямых, разскаются ими на пропорциональные части и сами делят эти параллельные на пропорциональные части (см. геометр. Кис. § 194), следовательно  $AM : MC = DN : NE$ , а т. к.  $AM = MC$ , то и  $DN = NE$ , что и требовалось доказать.

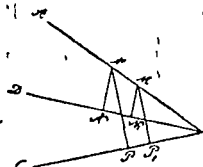
198. Даны прямые  $AB$ ,  $DB$  и  $CB$ , исходящие из одной точки  $B$  и точка  $M$ , движущаяся по прямой  $AB$ . Требуется доказать, что  $MN : MP = M_1N_1 : M_1P_1$ . Из подобных треугольников  $MNB$



и  $M_1N_1B$  (см. геом. Кис. § 178) имеем  $MB : M_1B = MN : M_1N_1$  точно также из подобных треугольников  $MPB$  и  $M_1P_1B$  имеем  $MB : M_1B = MP : M_1P_1$ , следовательно,  $MN : M_1N_1 = MP : M_1P_1$  и  $MN : MP = M_1N_1 : M_1P_1$ , что и требовалось доказать.

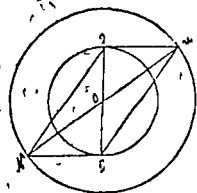


зад. 197.

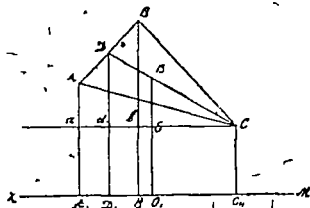


зад. 198.

199. Проведем диаметр  $MN$  и соединим  $N$  с  $E$  и  $F$ ; мы получим параллелограмм  $MENF$  (так как  $MO = ON$  и  $EO = OF$ ) а потому  $2EM^2 + 2MF^2 = EF^2 + MN^2$ , откуда  $EM^2 + MF^2 = (EF^2 + MN^2) = \text{const.}$



зад. 199.

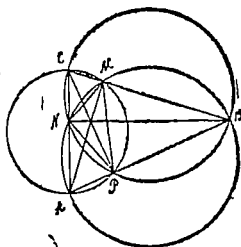


зад. 200.

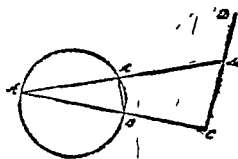
200. Пусть будут  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $ABC$ , на прямую  $ZM$ ,  $D$  — середина стороны  $AB$  и  $O$  — точка, делящая прямую  $DC$  в отношении  $1 : 2$ . Проведя  $Ca$  параллельно прямой  $ZM$ , находим  $OE : Dd = 2 : 3$  или  $OE = \frac{2}{3}Dd = \frac{2}{3}(DD' - dD')$ . Но  $2DD' = AA' + BB'$ , следовательно  $OO' = \frac{AA' + BB'}{3} - \frac{2}{3}dD' + EO' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$

201. Предположим, что в данном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $AM$ ,  $BN$  и  $CP$ . Соединив  $M, N$  и  $P$  прямыми, получим  $\triangle ANP$ ,  $\triangle BPM$  и  $\triangle CMN$ ; требуется доказать, что эти треугольники подобны  $\triangle$ -ку  $ABC$ . Докажем, например, что  $\triangle ABC$  и  $\triangle BPM$  подобны. В этих треугольниках  $\angle ABC$  общий, поэтому если докажем, что  $\angle ACB = \angle MPB$ , то  $\triangle ABC$  и  $\triangle BPM$  будут подобны. Опишем окружности на  $AC$ ,  $CB$  и  $AB$ , к. на диаметрах; точки

$N'$  и  $P$  будут лежать на этих окружностях, а вершины прямых углов, опирающихся на диаметры  $AC$ ,  $CB$  и  $AB$ . Из прямоугольных  $\angle \triangle ACM$  и  $CPB$  имеем равенство  $\angle ACM + \angle CAM = 90^\circ = \angle CPM + \angle MPB$ , но  $\angle CAM = \angle CPM$ , т. е. углы, опирающиеся на одну и ту же дугу  $CM$ , следовательно, имеем  $\angle ACM + \angle CAM = \angle CAM + \angle MPB$ , почему  $\angle ACM = \angle MPB$  и  $\angle ACB = \angle MPB$ , что и требовалось доказать. Докажем точно также, что  $\angle NRA = \angle ACB$ , следовательно,  $\angle MPB = \angle NRA$ . Вычитая это равенство из равенства  $\angle APN + \angle NPC = \angle CPM$  т. е. что прямая  $CP$  будет биссектрисой  $\angle NPM$ . Справ. рѣш. 151.



зад. 201

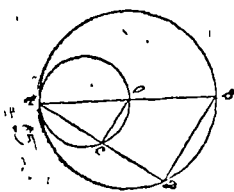


зад. 202.

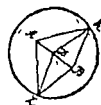
202. Треугольники  $AA'B$  и  $AMC$  подобны, т. е. углы  $MAC'$  общий,  $\angle ACM = 90^\circ$  и  $\angle AA'B = 90^\circ$ , как опирающийся на диаметр. Из подобия этих треугольников имеем:  $AM : AB = AC : AA'$ , откуда  $AM \cdot AA' = AB \cdot AC = \text{const.}$

203. Проведем через данную точку  $A$  в данной окружности центра  $O$  диаметр  $AB$  и какуюнибудь хорду  $AD$ , из центра  $O$  опустим перпендикуляр на хорду  $AD$  (см. черт. зад. 204). Из подобия треугольников  $ABD$  и  $AOC$  имеем:  $AB : AO = AD : AC$ ; но  $AB = 2AO$ , следовательно,  $2AO : AO = AD : AC$ , откуда  $AD = 2AC$ , т. е. хорда  $AD$  делится в точке  $C$  пополам. Так как  $\angle ACO = 90^\circ$ , то, следовательно, точка  $C$  лежит на окружности, описанной на  $AO$ , как на диаметре. Это же рассуждение относится ко всякой хорде, проведенной через точку  $A$ . Отсюда следует, что всякая точка  $C$  новой окружности будет серединой некоторой хорды  $AD$ , т. е.  $\angle ACO = 90^\circ$  и, следовательно,  $OC \perp AD$  и  $AC = CD$ , почему эта окружность и будет искомым геометрическим местом точек.

204. Въ данной окружности чрезъ данную точку А проводимъ диаметръ АВ и какую нибудь хорду АД, которые въ точкахъ О, О дѣлятся въ отношеніи  $m : n$  и АС:  $CD = m : n$ . Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ  $OC \parallel BD$  и  $\angle ACO = \angle ADB$ , а т. к.  $\angle ADB = 90^\circ$ , то и  $\angle ACO = 90^\circ$ , почему точка С точно также, какъ и другія точки дѣлящая хорды, проходящая черезъ А, въ отношеніи  $m : n$  лежить на окружности, опирающейся на АО, какъ на диаметрѣ. И такъ, эта окружность и есть геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ всѣ хорды, проведенныя изъ одной и той же точки окружности въ одномъ и томъ же направленіи.



зад. 203. 204.

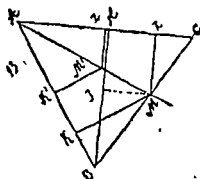


зад. 205.

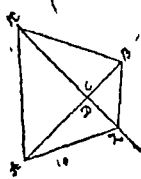
205. Если допустимъ, что М будетъ какая либо точка искомаго мѣста, то  $\frac{MK}{M'Z} = \frac{m}{n}$ . Проводимъ АМ и на этой прямой возьмемъ какую либо точку М, потомъ проведемъ линію  $M_1K_1$  и  $M'_1Z_1$  соответственныя перпендикулярныя къ АВ и АС. Изъ подобныхъ треугольниковъ АМК и  $AM'_1K'_1$  имѣемъ  $\frac{MK}{M'_1K'_1} = \frac{AM}{AM'_1}$ . Изъ подобныхъ треугольниковъ  $AMZ$  и  $AM'_1Z'_1$  имѣемъ:  $\frac{MZ}{M'_1Z'_1} = \frac{AM}{AM'_1}$ , почему  $\frac{MK}{M'_1K'_1} = \frac{MZ}{M'_1Z'_1}$ , откуда  $\frac{MK}{MZ} = \frac{M'_1K'_1}{M'_1Z'_1} = \frac{m}{n}$ . Такимъ образомъ, искомое мѣсто будетъ прямая АМ. Чтобы найти на ней точку, возьмемъ  $AB = AC$  затѣмъ проведемъ къ АС перпендикуляръ ВН и раздѣлимъ ВН на два такіе отрѣзка, чтобы  $\frac{BZ}{ZN} = \frac{m}{n}$ . Прямая ZN, проведенная параллельно АС, опредѣлитъ на ВС точку М, относящуюся къ этому геометрическому мѣсту, ибо  $MZ = ZN$ , а т. к. треугольники ВJM и ВKM равны (углы  $B = C = \angle BML$ ), то  $MK = BJ$ .

206. Положимъ, что К и Z—двѣ изъ точекъ искомага, геометрическаго мѣста: соединимъ ихъ съ данными точками А и В.

яже съ серединой D, отрезка AB. Имѣемъ (см. геом. Кисел. § 213)  $KA^2 + KB^2 = 2(AD^2 + KD^2)$  и  $ZA^2 + ZB^2 = 2(AD^2 + ZD^2)$ , (ибо KD, ZD — медианы  $\triangle KAB$  и  $\triangle ZAB$ ); по условію  $KA^2 + KB^2 = ZA^2 + ZB^2 = \text{const.}$ , т. е. точки K и Z лежатъ въ равномъ разстояніи отъ D; такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть окружность, центръ которой находится въ серединѣ отрезка между данными точками.



зад. 205.



зад. 207

207. Пусть точки A и B — данные, а K и Z — двѣ изъ точекъ искомаго геометрическаго мѣста. Опустивъ изъ K и Z на прямую AB перпендикуляры KC и ZD, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ  $\triangle KAC$ ,  $\triangle KBC$ ,  $\triangle ZAD$  и  $\triangle ZBD$  будемъ имѣть:  $KA^2 = AC^2 + KC^2$ ;  $KB^2 = CB^2 + KC^2$ ;  $ZA^2 = AD^2 + ZD^2$ ;  $ZB^2 = DB^2 + ZD^2$ ; по условію  $KA^2 + KB^2 = ZA^2 + ZB^2 = \text{const.}$ , или  $AC^2 + CB^2 = AD^2 + DB^2 = \text{const.}$  отсюда  $(AC + CB)(AC - CB) = (AD + DB)(AD - DB) = AB \cdot (AC - CB) = AB \cdot (AD - DB)$  или  $AC - CB = AD - DB$ ; складывая полученное равенство съ равенствомъ  $AC + CB = AD + DB$ , найдемъ:  $AC = AD$ , т. е. точка D совпадаетъ съ точкой C и точки K и Z лежатъ на одномъ и томъ же перпендикулярѣ къ AB; этотъ перпендикуляръ и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.

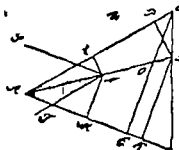
212. Внутри угла ABC дана точка M; требуется провести прямую DC такъ, чтобы  $DM : DC = m : n$ . Проведа произвольную прямую MN и раздѣливъ ее на n равныхъ частей, откладываемъ на продолженіи ея отрезокъ MP, равный m частямъ, и затѣмъ проводимъ чрезъ точку P прямую  $PD \parallel BC$ . Соединяя точку D пересѣченія прямой PD и стороны угла AB съ точкой M, получимъ искомую линію CD. Дѣйствительно, т. к. треугольники  $\triangle MPD$  и  $\triangle CMN$  подобны (ибо у нихъ углы равны), то  $DM : MC = PM : MN = m : n$ .

213. Пусть искомый  $\triangle$  будетъ ABC. На сторонѣ BC опредѣляемъ точку D такъ, чтобы разстоянія ея DR и DP отъ двухъ другихъ сторонъ AB и AC относились какъ m : n, т. е.  $DR : DP = m : n$ . Для этого поступаемъ такъ: произвольную прямую XJ дѣ-

Возьмем въ точкѣ  $Z$  такъ, чтобы  $XZ : ZJ = m : n$ , затѣмъ проводимъ прямую  $FN$  параллельно  $AC$  на разстоянн  $ZJ$  отъ нея и прямую  $JN \parallel AB$  на разстоянн  $XZ$  отъ нея такъ, что  $MN : ZN = m : n$ . Прямая  $NOD$ , на которой находится и точка  $D$ , будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, изъ которыхъ перпендикуляры опущенныя на двѣ стороны  $AB$  и  $AC$ , относятся, какъ  $m : n$ . Точно также найдемъ  $SE$  геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ опущенные перпендикуляры на двѣ стороны  $AC$  и  $BC$ , относились какъ  $n : p$ . Точка пересѣченія  $O$  этихъ двухъ геометрическихъ мѣстъ будетъ искомою.

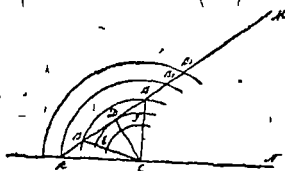


зад. 212.

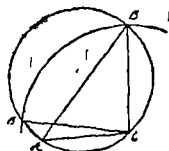


зад. 213.

214. Положимъ, что требуется построить  $\triangle ABC$ , въ которомъ дана сторона  $AC$ ,  $\angle BAC$  и отношение  $AC : BC = m : n$ . Чтобы рѣшить задачу, строимъ  $\angle MAN$ ,  $=$  данному углу, на сторонѣ его  $AM$  откладываемъ часть  $AC$ ,  $=$  данной сторонѣ, ватѣмъ изъ  $C$  радиусомъ  $= AC \cdot \frac{m}{n}$ , описываемъ дугу, пересѣченіе которой съ  $AM$  другою стороною  $\angle MAN$  опредѣлитъ третью вершину треугольника. Рѣшеніе будетъ два, когда  $BC$  будетъ  $> AC$  и  $< AC$ , одно, когда  $BC = AC$  или же  $BC > AC$ , и ни одного, когда  $BC < AC$ .



зад. 214

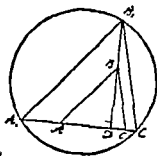


зад. 215.

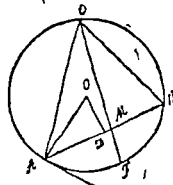
215. Положимъ, что требуется построить  $\triangle ABC$ , въ которомъ даны, сторона  $AC$ ,  $\angle ABC$  и отношение  $AC : BC = m : n$ . Чтобы рѣшить эту задачу опишемъ на сторонѣ  $AC$  дугу, выѣмшающую  $\angle ABC$ , затѣмъ изъ  $C$  радиусомъ, равнымъ  $AC \cdot \frac{n}{m}$ , опишемъ дугу, пересѣ-

чение которой съ первой дугой опредѣлитъ В третью вершину искомаго  $\triangle ABC$ . Здѣсь можетъ быть два рѣшенія (когда  $BC < \text{диаметра}$  круга, описаннаго около  $\triangle ABC$  и  $> AC$ ), одно рѣшеніе (когда  $BC = \text{диаметру}$  круга, описаннаго около  $\triangle ABC$ , или  $BC < AC$ ) и ни одного рѣшенія (когда  $BC > \text{диаметра}$  круга, описаннаго около  $\triangle ABC$ ).

216. На прямой  $A'C'$  отъ произвольной точки  $D$  откладывая отрезки  $A'D$  и  $C'D$ , которые бы находились между собою въ отношеніи  $m:n$ . Затѣмъ въ точкѣ  $D$  возстановляемъ перпендикуляръ  $DB'$  до пересѣченія его съ окружностью, проходящею чрезъ  $A'$  и  $C'$ , и вмѣщающей  $\angle A'B'C' = \angle ABC$ . Такимъ образомъ получимъ  $\triangle A'B'C'$ . На высотѣ  $DB'$  отъ точки  $D$  откладываемъ отрезокъ  $DB$ , равный данной высотѣ, и чрезъ точку  $B$  проводимъ  $BA \parallel B'A'$  и  $BC \parallel B'C'$ .  $\triangle ABC$  будетъ искомымъ: Въ самомъ дѣлѣ,  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ,  $A'D:AD = B'D:BD = C'D:CD$ , откуда  $A'D.C'D = AD.CD = m.n$ .



зад 216

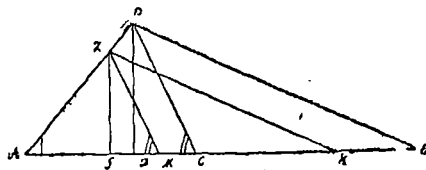


зад 217.

217. Описываемъ на  $B$  окружность, вмѣщающую данный  $\angle ABC$ , для чего при концѣ прямой  $AB$  строимъ  $\angle BAE$ , равный данному углу; изъ середины прямой  $AB$  возстановляемъ перпендикуляръ  $DO$  и изъ точки  $A$  перпендикуляръ къ  $AE$ . Пересѣченіе  $O$  этихъ двухъ перпендикуляровъ принимаемъ за центръ и радиусомъ  $OA$  описываемъ окружность. Всякій уголъ, вписанный въ сегментъ  $ACB$ , будетъ равенъ данному углу. Такъ какъ биссектриса  $\angle ABC$  дѣлитъ дугу  $AFB$  на равныя части, то, раздѣливъ дугу  $AFB$  въ  $F$  пополамъ и проведя  $FM$  до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ  $C$ , найдемъ третью вершину  $C$  треугольника  $ABC$ .

218. Такъ какъ даны 2 угла треугольника, то его видъ извѣстенъ, и потому построимъ какой нибудь  $\triangle ABC$ , подобный искомому; затѣмъ измѣряемъ сумму его высоты  $BD$  и основанія  $AC$ . Если построеніе сдѣлано такъ удачно, что  $BD + AC = S$ , то  $\triangle ABC$

и будет искомым. Но вообще этого не случится, и сумма  $BD + AC$  будет равна прямой  $S'$ , а не  $S$ . Чтобы переделывать  $\triangle ABC$  в искомый, надо его умножить на  $S : S'$ ; тогда и высота  $BD$  и основание  $AC$  умножатся на  $S : S'$ , сумма  $BD + AC$  умножится на то же число и будет равна  $S' \cdot \frac{S}{S'} = S$ . Для этого не должно измерять во сколько раз  $S'$  больше или меньше  $S$ , а нужно отложить  $AE = S$  и  $AK = S$ , провести  $KZ \parallel BE$  и затем  $ZM \parallel BC$ . Тогда  $\triangle AZM$  будет искомым. В самом деле из  $\triangle AZM$ ,  $ABC$ ,  $AZK$  и  $ABE$  имеем; 1)  $AB : AZ = S' : S$  и 2)  $AB \cdot AZ = BD : ZG = AC : AM$ . Из пропорции находимъ (2)  $AB \cdot AZ = (BD + AC) \cdot (ZG + AM)$  или  $AB : AZ = S' : (ZG + AM)$ . Сравнивая последнюю пропорцию съ (1) видимъ, что  $ZG + AM = S$ , что и требовалось доказать.



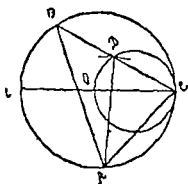
зад 218

219. Предположимъ, что требуется построить равнобедренный треугольник  $ABC$ , въ которомъ данъ уголъ  $B$  при вершинѣ и сумма  $AC + BD$  (см. чертѣжъ 32 въ § 32 геом. Кисел.). Такъ какъ искомый треугольникъ равнобедренный и известны углы  $A$  и  $C$ , то рѣшеніе этой задачи приводится къ зад 218

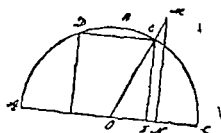
220. Мы знаемъ, что биссектрисса внутренняго угла треугольника пересѣкаетъ противоположную сторону въ такой точкѣ, которой разстоянія отъ концовъ этой стороны пропорциональны двумъ другимъ сторонамъ треугольника, поэтому, раздѣляя основание въ данномъ отношеніи, найдемъ на основаніи точку, чрезъ которую проходитъ биссектрисса угла при вершинѣ, и тогда задача сводится къ рѣшенію задачи 217

221. Положимъ, что требуется вписать въ данную окружность  $\triangle ABC$ , въ которомъ дано основание  $AC$  и медиана  $AD$ , относительно стороны  $BC$ . Чтобы рѣшить эту задачу, изъ произвольной точки  $A$  опишемъ дугу, радиусомъ, равнымъ  $AC$ , искомага треугольника  $ABC$ . Затемъ, чрезъ точку  $C$  проводя диаметр  $CE$ , на радиусѣ  $CO$

такъ на диаметрѣ описываемъ окружность и, наконецъ изъ  $A$  радиусомъ, равнымъ данной медианѣ, описываемъ дугу, пересѣчение которой съ только что описанной окружностью опредѣлитъ среднюю сторону  $BC$  искомага треугольника  $ABC$ . Проведа прямую чрезъ  $C$  и  $D$  до пересѣчения съ окружностью въ точкѣ  $B$ , получимъ третью вершину  $\triangle$ -ка  $ABC$ .



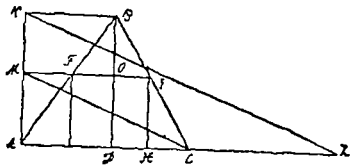
зад 221



зад 222

**222** Пусть искомымъ квадратъ будетъ  $DEFG$ , точка  $O$  будетъ середина хорды  $AC$ , такъ что  $AO=OC$ . Изъ произвольной точки  $N$  хорды  $AC$  возстанавливаемъ къ ней перпендикуляръ  $NM$ , равный  $2ON$ . Точка пересѣчения  $OM$  съ дугой будетъ одной вершиной квадрата. Проведа  $ED \parallel AC$ ,  $EF \parallel MN$  и  $DG \parallel EF$ , получимъ искомый квадратъ.

**223** Предположимъ, что задача рѣшена и искомый квадратъ  $FEGH$  вписанъ въ данный  $\triangle ABC$ . Разсматривая фигуру, замѣчаемъ, что сторона  $FG$  искомага квадрата параллельна сторонѣ  $AC$  даннаго треугольника, и потому достаточно знать одну изъ точекъ этой стороны  $FG$ , напримѣръ точку  $O$  ея пересѣчения съ высотой



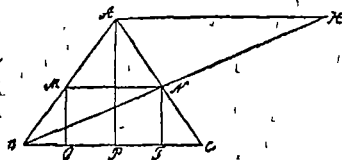
зад 223

$BD$ . Но если означимъ сторону искомага квадрата чрезъ  $x$  и положимъ  $BD=h$ , то будемъ имѣть  $BO=h-x$ , а треугольникъ  $ABC$  и  $FBG$  дадутъ пропорцію.  $AC:FG=BD:BO$  или  $b:x=h:(h-x)$ , и отсюда  $x=\frac{bh}{b+h}$ . Это выражение показываетъ что сторона ис-



кого квадрата есть четвертая пропорциональная къ тремъ линиямъ:  $b$ ,  $h$  и  $b+h$ . Следовательно, задача можетъ имѣть одно, два или 3 рѣшенія, смотря потому, будетъ ли данный треугольникъ  $ABC$  равносторонній, равнобедренный или разносторонній. Построеніе достаточно поясняется чертежомъ.

**224.** Предположимъ, что задача, рѣшена, а именно въ данномъ  $\triangle ABC$  вписанъ искомый прямоугольникъ  $MNFQ$ , у котораго  $MN : NF = m : n$ . Изъ вершины  $A$  данного треугольника  $ABC$  опускаемъ  $\perp AP$  на  $BC$ , тогда изъ подобныхъ треугольниковъ  $APC$  и  $NFC$  имѣемъ  $AP : NF = AC : NC$ . Затѣмъ черезъ точку  $A$  проводимъ  $AN \parallel BC$ , которая по положенію,  $\parallel MN$ , и точку  $B$  соединяемъ съ точкою  $N$  прямою  $BN$ , которую продолжаемъ до пересѣченія съ прямою  $AN$  въ точкѣ  $H$ , тогда изъ подобныхъ треугольниковъ  $BAH$  и  $BMN$  имѣемъ:  $AB : BM = AH : MN$ . Такъ какъ  $MN \parallel BC$ , а мы знаемъ, что стороны угла параллельными дѣлятся на пропорціональ-

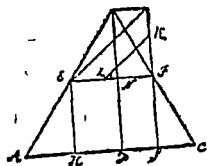


зад. 224.

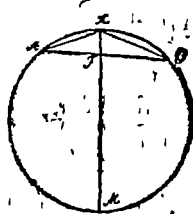
ныя части, то на основаніи этого имѣемъ  $AB : BM = AC : CN$ . Сравнивая эту пропорцію съ первую, получаемъ  $AP : NF = AB : BM$ ; сравнивая, наконецъ, эту пропорцію со второю, получаемъ  $AP : NF = AH : MN$ . Такъ какъ  $MN$  и  $NF$  суть стороны искомаго прямоугольника, то  $AH : AP = m : n$ . Это показываетъ, что для построенія искомаго прямоугольника въ данномъ треугольникѣ  $ABC$  должно изъ вершины  $A$  провести высоту  $AP$  и прямую  $AN \parallel BC$ , на которой откладываемъ часть  $AH$  такъ, чтобы  $\frac{AH}{AP} = \frac{m}{n}$ . Затѣмъ соединяемъ точку  $B$  съ точкою  $N$  прямою  $BN$ , которая пересѣчетъ сторону  $AC$  въ точкѣ  $N$ . Если мы изъ этой точки  $N$  опустимъ  $\perp NF$  на  $BC$  и проведемъ  $NM \parallel BC$ , то эти прямые суть стороны искомаго вписаннаго прямоугольника  $MNFQ$  и находятся въ отношеніи  $m : n$ . Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ  $\triangle BAP$  и  $BMQ$  имѣемъ:  $BA : BM = AP : MQ$ ; изъ подобныхъ  $\triangle BAH$  и  $BMN$  имѣ-

тъ:  $BA : BM = AN : MN$ , почему  $AP : MQ = AN : MN$ . Но  $AN : AP = m : n$ , следовательно и  $MN : MQ = m : n$  а такъ какъ  $MQ = NF$ , то и  $MN : NF = m : n$ , что и требовалось доказать.

**225.** Предположимъ, что задача рѣшена и что около даннаго квадрата  $EFGH$  описанъ треугольникъ  $ABC$ , подобный данному, треугольнику  $A'B'C'$ . Опустимъ перпендикуляры  $BD$  и  $B'D'$  на основаніи  $AC$  и  $A'C'$  и обозначимъ:  $BN = x$ ,  $AC = y$ ,  $EF = m$ ,  $A'C' = l$ ,  $B'D' = h'$ . Изъ подобія треугольниковъ  $EBF$  и  $ABC$  имѣемъ:  $EF : AC = BN : BD$  или  $m : y = x : (x + m)$ , а изъ подобія треугольниковъ  $ABC$  и  $A'B'C'$  получимъ  $(x + m) : y = h' : b'$ . Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ:  $x = \frac{mh'}{b'}$ . Теперь постараемся построить  $x$ , для чего на продолженіи  $FG$  отложимъ  $FK = h' = FZ = b'$ ; ватѣмъ проведемъ  $KZ$  и  $EJ \parallel ZK$  и найдемъ, что  $JF = x$ , такъ какъ  $JF : EF = FK : FZ$  или  $JF : m = h' : b'$ , откуда  $JF = \frac{mh'}{b'} = x$ . Затѣмъ по  $BF$ ,  $JF = BN$  и  $\angle EBF = \angle A'B'C'$  строимъ  $\triangle EBF$  и, продолживъ  $BE$ ,  $BF$  и  $FG$ , получимъ искомый  $\triangle ABC$ .



зад. 225.

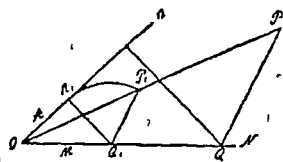


зад. 226.

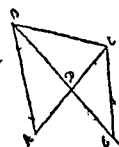
**226.** Пусть искомою точкою будетъ  $X$ , что  $AX : XB = m : n$ . Тогда, соединивъ  $X$  съ точкою  $M$  серединою дуги  $AMB$ , найдемъ, что  $\angle AXM = \angle MXB$ , а потому (см. геом. Кис. § 198)  $\frac{AX}{XB} = \frac{AM}{MB}$ . По предыдущему равно  $\frac{m}{n}$ , следовательно  $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ . Откуда заключаемъ, что  $X$  лежитъ на прямой, которой известны двѣ точки.  $M$  середина дуги  $AMB$  и  $F$ , дѣлящая  $AB$  въ отношеніи  $\frac{m}{n}$ .

**227.** Продолживъ прямую  $MN$  и  $AB$  до пересѣченія въ точкѣ  $P$  и соединимъ прямою точки  $O$  и  $P$ , возобновимъ къ прямой  $AB$

въ какой-нибудь точкѣ  $R'$  перпендикуляръ  $R'Q'$  и наконецъ,  $PQ \parallel P'Q'$  и  $QR \parallel Q'R'$ . Точка  $O$  будетъ искомою. Действительно  $\triangle OPQ \sim \triangle OP'Q'$ , поэтому  $PQ : P'Q' = OQ : OQ'$ ; треугольники  $ORQ$  и  $OR'Q'$  также подобны, почему  $RQ : R'Q' = OQ : OQ'$ . Изъ этихъ двухъ пропорцій имѣемъ:  $PQ : P'Q' = RQ : R'Q'$ , но  $P'Q' = R'Q'$ , следовательно  $PQ = RQ$ , что и требовалось доказать.



зад. 227.

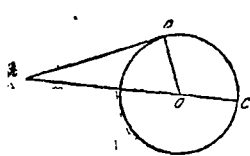


зад. 228.

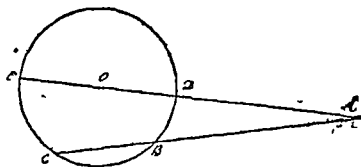
228. Даны двѣ стороны  $AB$  и  $BC$  и биссектриса  $BD$ . Продолжимъ  $BD$  и проведемъ  $EC \parallel AB$ ; получимъ равнобедренный треугольникъ. Такъ какъ  $\angle DEC = \angle ABD$  и  $\angle ABD = \angle DBC$ , то  $\angle DEC = \angle DBC$ , следовательно, треугольникъ  $BCE$  равнобедренный, почему  $BC = EC$ . Изъ подобія треугольниковъ  $ABD$  и  $EDC$  имѣемъ  $\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{DE}$ , но  $EC = BC$ , следовательно  $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DE}$ , откуда  $DE = \frac{BC \cdot BD}{AB}$ . Построимъ  $DE$ , какъ четвертую пропорциональную найдемъ, что  $BE = BD + DE$ . Такимъ образомъ, построивъ равнобедренный треугольникъ  $BEC$ , по  $BE$  и  $BC = EC$ , и отложивъ на  $BE$  отрезокъ  $DE$ , проводимъ  $DC$  и, удвоивъ  $\angle DBC$ , проводимъ  $AB$ , которой и опредѣлится искомый  $\triangle ABC$ .

229. Изъ условия задачи имѣемъ:  $\frac{x}{m} = \frac{a^2}{b^2}$ , откуда  $x = \frac{a^2 \cdot m}{b^2}$ . Или принявъ  $\frac{a^2}{b^2} = n, x = \frac{n \cdot m}{b}$ . Строимъ сперва  $n$ . Для этого на произвольной прямой (см. геом. Кис. § 203, 2<sup>о</sup> чер. 17) откладываемъ часть  $AB = b$  и на ней опишемъ полуокружность. Съ тѣмъ изъ точки  $A$  опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ  $AD = a$ , наконецъ, изъ точки  $D$  опустимъ перпендикуляръ  $DC$  на  $AB$ . Отрезокъ  $AC$  будетъ равенъ  $n$ . Найдя  $n$ , легко найти  $x$  (см. геом. Кис. § 196).

**230.** Предположим, что точка  $A$  будет искомая, так что  $AC \parallel 2AB$ . Из прямоугольного  $\triangle$ -на  $ABO$  имеем  $AO^2 = AB^2 + OB^2$ ,  $AO + OC = 2AB$  или  $AO^2 = AB^2 + r^2$  и  $AO + r = 2AB$ . Решая эти уравнения, найдем  $AO = \frac{5}{3}r$ . Построив  $AO$ , отложим на  $AO$  от центра  $O$ , точку  $A$  будет искомая.



зад 230.



зад 231.

**231.** Пусть  $ABC$  искомая сѣкущая, такъ что  $\frac{AB}{CB} = \frac{m}{n}$  откуда  $AB = \frac{CB \cdot m}{n}$ . Взявъ сѣкущую  $ADOE$ , проходящую черезъ центръ и означивъ  $AD$  чрезъ  $d$ ,  $OD$  или  $OE$  чрезъ  $r$ , найдемъ  $\frac{d+2r}{AC} = \frac{AB}{d}$  или  $\frac{d+2r}{CB+AB} = \frac{d+2r}{CB + \frac{CB \cdot m}{n}} = \frac{n}{d}$  ; отсюда  $\frac{n(d+2r)}{CB(m+n)} = \frac{CB \cdot m}{nd}$  откуда  $CB^2(m+n)m = n^2d(d+2r)$ , а

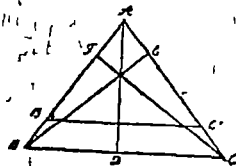
$$CB = \sqrt{\frac{n^2d(d+2r)}{(m+n) \cdot m}} = n \sqrt{\frac{d(d+2r)}{(m+n)m}}$$

**232.** Пусть  $\triangle ABC$  искомый. Обозначимъ чрезъ  $a, b, c$  его 3 стороны, а чрезъ  $a', b', c'$  три соответственныхъ высоты. Изъ подобныхъ  $\triangle BCF$  и  $BAD$  имѣемъ.  $\frac{a}{c} = \frac{c'}{a'}$ , откуда  $ab' = bb' = bc'$ ... (1) Для каждое изъ этихъ отношеній на  $a'b'$ , выходитъ, что  $\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{cc'}{a'b'} = \frac{c}{a'b'}$ , или  $\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{a'b'}$ . Равенство этихъ отношеній показываетъ, что если построить  $\triangle AB'C'$ , у котораго сторонами будутъ  $AC' = b'$ ,  $BC' = a'$ ,  $AB' = \frac{a'b'}{c'}$ , этотъ треугольникъ будетъ подобенъ  $\triangle$ -ку  $ABC$ , и если припомнить, что въ подобныхъ треугольникахъ высоты, соответственныя сходственнымъ сторонамъ,

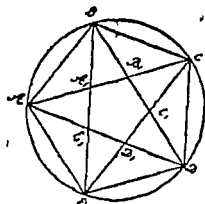
будут охотвенныя прямые, то достаточно для получения  $\triangle ABC$ , взять на высоте, идущей из вершины  $A$ , длину  $AD = a'$  и провести через  $D$  линию  $BC$ , параллельную  $B'C'$ .

*Примѣчаніе.* Дабы задача была возможна, необходимо, чтобы можно было построить  $\triangle AB'C'$ . Поэтому, если мы допустимъ, что  $a' > b' > c'$ , откуда  $a' < \frac{a'b'}{c'}$ , то условие возможности будетъ слѣдующее:  $\frac{a'b'}{c'} < a' + b'$ ; ибо какая либо сторона,  $\frac{a'b'}{c'}$ , будетъ меньше суммы двухъ остальныхъ, полагая, впрочемъ, что она больше ихъ разности.

Треугольникъ  $AB'C'$  построить легко, потому что  $a'$  и  $b'$  даны, третья же сторона  $AB'$  есть 4-я пропорциональная къ известнымъ величинамъ  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$ .



зад. 232.



зад. 245

**245.** Проведемъ въ правильномъ пятиугольникѣ  $ABCDE$  диагонали, требуется доказать, что образовавшійся пятиугольникъ  $A'B'C'D'E'$  правильный. Мы знаемъ, что около правильного пятиугольника можно провести окружность (см. геом. Кис § 228, 1<sup>о</sup>), слѣдовательно,  $\angle ABE = \angle EBD = \angle DBC = \angle BCA = \angle ACE = \angle ECD$  и т. д., какъ вписанные углы, опирающіеся на равныя дуги, почему равнобедренные треугольники  $AA'B$ ,  $BB'C$ ,  $CC'D$  и т. д., имѣюща равныя основанія и равныя углы при основаніи, равны, а вслѣдствіе ихъ равенства и треугольники  $AE'A'$ ,  $A'B'B'$ ,  $B'C'C'$  и т. д. равны, т. е.  $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$ . Но углы въ пятиугольникѣ  $A'B'C'D'E'$  равны между собою, ибо  $\angle AA'B = \angle E'A'B'$  какъ углы накрестъ лежащіе, слѣдовательно пятиугольникъ  $A'B'C'D'E'$  будетъ правильный.

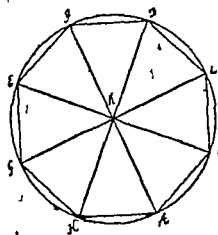
**246.** Равнобедренные треугольники  $AOB$  и  $DOC$  равны, почему  $\angle OAB = \angle OCD$ , а т. к.  $\angle OCB + \angle OCE = 2d$ , то слѣдователъ

то, и  $\angle OAB + \angle OCE = 2d$ , и около четырехугольника  $OАЕС$  можно описать окружность.

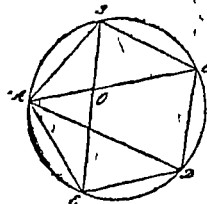
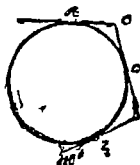
247. (1°) Изъ центра круга  $K$  проведемъ радиусы ко всѣмъ вершинамъ; тогда многоугольникъ раздѣлится на равные равнобедренные треугольники ибо они имѣютъ по 3 равныя стороны. Изъ равенства равнобедренныхъ треугольниковъ слѣдуетъ, что всѣ углы, прилежащія къ сторонамъ многоугольника, равны между собою, поэтому и сумма каждаго двухъ угловъ или углы многоугольника будутъ равны между собой.

(2°) Въ равноугольномъ вписанномъ многоугольникѣ стороны черезъ одну равны между собой

(4°) Въ равностороннемъ описанномъ многоугольникѣ углы чрезъ одинъ равны между собой, напримѣръ,  $\angle B = \angle M$ , потому что  $BC = ZM$ . Если же число сторонъ нечетное, то всѣ углы равны между собой.



зад 247



зад. 248.

248 Опишемъ окружность вокругъ многоугольника.  $\angle BOC = \angle OBC$ , т. к. измѣреніе ихъ одинаково, слѣдовательно,  $\triangle BOC$  равнобедренный и  $BC = OC$ . Съ другой стороны  $\triangle AOB$  и  $BAC$ , какъ равноугольные подобны, и потому  $\frac{AB}{AC} = \frac{AO}{BC}$ ; стало быть  $BC^2 = AC \cdot AO$  или  $CO^2 = AC \cdot AO$ , ибо  $CO = BC$ . Слѣдовательно прямая  $AOC$  раздѣлена, въ точкѣ  $O$  въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

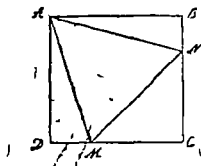
249 См. геом Кисел § 243.

250 См геом Кисел § 243.

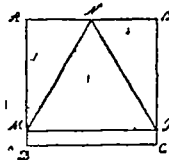
251 Чтобы сръзвать отъ даннаго квадрата углы, такъ, чтобы образовался правильный 8-угольникъ, проводимъ диагонали въ данномъ квадратѣ, затѣмъ изъ пересѣченія диагоналей, опускаемъ пер-

перпендикуляр на одну из его сторон и радиусом, равным этому перпендикуляру вписываем в него круг. Через точки пересечения этой окружности с диагоналями данного квадрата проводим касательные к окружности, тогда и получим правильный восьмиугольник.

252. а) Предположим, что равносторонний  $\triangle ANM$  вписан в квадрат  $ABCD$ . Так как в прямоугольных треугольниках  $ADM$  и  $ABN$  стороны  $AB=AD$  и  $AN=AM$ , то следовательно, эти треугольники равны, почему  $\angle DAM=\angle BAN$ , а так как  $\angle MAN=60^\circ$ , то  $\angle DAM+\angle BAN=30^\circ$  или  $2\angle DAM=30^\circ$ , откуда  $\angle DAM=15^\circ$ . Отсюда следует построение. Для того, чтобы вписать равносторонний треугольник в квадрат, должно при одной из вершин квадрата на двух его сторонах построить углы  $DAM$  и  $BAN$  равные  $15^\circ$ , а затем провести прямые  $AM$ ,  $AN$  и  $MN$ . Треугольник  $AMN$  будет искомым.



зад 25 а



зад. 252б.

б) Положим, что равносторонний  $\triangle MNP$  вписан в квадрат  $ABCD$ . В прямоугольных  $\triangle AMN$  и  $BNP$  стороны  $AN=NB$  и  $NM=NP$ , следовательно, и сами треугольники равны, почему  $\angle ANM=\angle BNP$ , а так как  $\angle MNP=60^\circ$ , то  $\angle ANM+\angle BNP=180^\circ-60^\circ=120^\circ=2\angle ANM$  или  $\angle ANM=60^\circ=\angle BNP$ . Отсюда построение: При точке  $N$  середина стороны  $AB$  строим два угла  $ANM$  и  $BNP$ , равные  $60^\circ$ , а затем соединяя точки  $N$ ,  $M$ ,  $P$  прямыми, получим искомый  $\triangle MNP$ .

254. а) Строим такой равнобедренный треугольник, чтобы основание его было равно большей части боковой стороны, разделенной в крайнем и среднем отношении (см. геом. Кис. § 236), а затем угол, противолежащий основанию делим пополам.

б) Строим угол, опирающийся на хорду, равную радиусу, а затем делим его пополам. См. решен. зад. 67.

с) На прямой АВ при точкѣ N строимъ  $\angle ANC = 30^\circ$  и за-  
мѣмъ уголъ CNB дѣлимъ пополамъ.

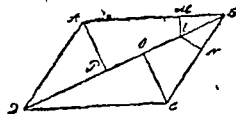
д) Уголъ въ  $72^\circ$  половина угла правильнаго десятиугольника,  
поэтому строимъ правильный десятиугольникъ (см. геом. Кн. § 236),  
затѣмъ дѣлимъ одинъ изъ его угловъ пополамъ.

255. Докажемъ, что если дуга  $AD = \text{дуга } CD$ , то  $\angle AMB$ ;  
 $\angle CND = CN : AM = r : R$ . Положимъ, что  $\angle AMB = m^\circ$  и  $\angle CND =$   
 $n^\circ$ , тогда дуга  $AB = \frac{2\pi Rm}{360}$ , а дуга  $CD = \frac{2\pi rn}{360}$ , но изъ условий за-  
дѣчи имѣемъ  $\frac{2\pi Rm}{360} = \frac{2\pi rn}{360}$ , почему  $Rm = rn$  или  $R : r = n : m =$   
 $\frac{\angle CND}{\angle AMB}$ , что и требовалось доказать.



зад. 255.

261 Изъ точки E на діагонали BD параллелограмма ABCD  
опустимъ два перпендикуляра EM и EN на прилежащія стороны  
AB и BC; требуется доказать, что  $\frac{AB}{BC} = \frac{ON}{OM}$ . Для этого опустимъ  
перпендикуляры AP и CO на діагональ BD. Изъ подобія треуголь-  
никовъ ABR и EBM будемъ имѣть  $\frac{AB}{EB} = \frac{AP}{EM}$ . Изъ подобія тре-  
угольниковъ BCO и BEN будемъ имѣть  $\frac{BC}{EN} = \frac{CO}{EN}$ . Раздѣливъ пер-  
вую пропорцію на вторую, получимъ:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AP \cdot EN}{CO \cdot EM}$ , но  $AP = CO$   
(какъ высоты двухъ равныхъ  $\triangle ABD$  и  $\triangle BCD$ ), следовательно,  
 $\frac{AB}{BC} = \frac{EN}{EM}$ , что и требовалось доказать.

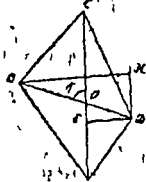


зад. 261

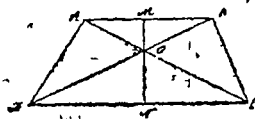
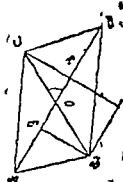


262. Дана трапеция  $ABCD$ , в которой  $BC \parallel AD$  и  $E$  середина  $AB$ . Из точки  $E$  опустим  $\perp EF$  на  $CD$  и проведем прямую  $EG \parallel BC$  до пересечения с  $CD$  в точке  $G$ ; опустим перпендикуляр  $DK$  на  $BC$ . Треугольники  $EFG$  и  $CDK$  подобны и потому  $EG \cdot EF = CD \cdot DK$  или  $EG \cdot DK = CD \cdot EF$ , где  $EG \cdot DK$  — площадь трапеции  $ABCD$ .

263. Положим, что в двух четырехугольниках  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  диагональ  $AC = A'C'$ ,  $BD = B'D'$  и  $\angle BOC = \angle B'O'C'$ . Проведем  $DE \perp AC$ ,  $DH \parallel AC$  и  $BH \perp DH$ , и точно также  $D'E' \perp A'C'$  и  $B'H' \perp D'H'$ . Будем иметь: площадь  $ABCD = \text{пл. } \triangle ABC + \text{пл. } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC(BK + DE)$ , или так как  $DE = KH = \frac{1}{2} AC \cdot BH$ . Таким же точно образом находим, что  $\text{пл. } A'B'C'D' = \frac{1}{2} A'C' \cdot B'H'$ . Из равенства прямоугольных треугольников  $BDH$  и  $B'D'H'$ , в которых  $BD = B'D'$  и  $\angle BDH = \angle B'OK = \angle B'O'K' = \angle B'D'H'$ , имеем, что  $BH = B'H'$ , следовательно, площадь четырехугольника  $ABCD = \text{пл. } \triangle ABC + \text{пл. } \triangle ACD = \text{пл. } \triangle A'B'C' + \text{пл. } \triangle A'D'C'$  что и требовалось.



зад. 263.



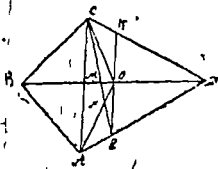
зад. 264.

264. Дана трапеция  $ABCD$ . Проведем высоту  $MN$ . Пусть  $AB = x$ ,  $MO = k$ ,  $NO = z$ ,  $DC = v$ , тогда будем иметь  $\frac{xy}{2} = p^2$ ,  $\frac{zv}{2} = q^2$  и (из подобия  $\triangle ABO$  и  $\triangle DCO$ )  $xz = uv$ . Пл. трапеции  $ABCD = \frac{1}{2}(x+v)(y+z) = \frac{1}{2}(xy + yv + xz + zv) = \frac{1}{2}(xy + zv) + yv = p^2 + q^2 + yv$ . Но  $p^2 q^2 = \frac{xyzv}{4} = \frac{y^2 v^2}{4}$ , почему  $2pq = yv$ , следовательно, площадь трапеции  $ABCD = p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2$ , что и требовалось доказать.

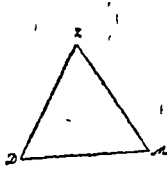
265. Пусть  $AB$  будет сторона правильного вписанного в треугольника в круг  $O$ . Проведем касательные  $CA$  и  $CB$  к кругу и равноудален  $\angle ABO$  и  $BAO$  до пересечения в точке  $D$ ;  $OC$

пересечь  $AB$  в точке  $E$ . Угол  $\angle DOA = \angle DAO$  и  $\angle DAC = \angle DCA$ , следовательно,  $OD = AD = CD$  и  $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}OC$ , поэтому площадь  $\triangle AOE = \frac{1}{4}$  площади  $\triangle AOC$ . Умножив обе части на 12 найдем, что площадь правильного вписанного 6-тиугольника  $= \frac{1}{4}$  площ. правильного описан. 6-тиугольника.

266. Данъ  $\square ABCD$ , въ которомъ чрезъ точку  $O$  — середину диагонали  $BD$  проведена прямая  $KE \parallel CA$ . Требуется доказать, что площадь  $\square ABCE =$  площ.  $\triangle CDE$ . Соединимъ точку  $O$  съ  $A$  и  $C$ , тогда площ.  $ABO =$  площ.  $AOD$  и площ.  $BCO =$  площ.  $COD$ , почему площ.  $ABO +$  площ.  $BCO =$  площ.  $AOD +$  пл.  $COD$  или площ.  $ABCO =$  пл.  $AOCD$ . Это последнее равенство можемъ написать такъ: пл.  $ABCN +$  пл.  $NCO =$  пл.  $ANE +$  пл.  $ENOC$ . Дальше мы видимъ, что  $\triangle AOE$  и  $\triangle COE$  равновелики, (см. геом. Кис. § 277, 1<sup>о</sup>), следовательно и  $\triangle ANE$  и  $\triangle NCO$  тоже равновелики, почему предыдущее равенство не нарушится, если мы его напишемъ такъ: пл.  $ABCN +$   $+ ANE =$  пл.  $NCO +$  пл.  $ENOC$ , тогда мы видимъ, что пл.  $ABCE =$   $=$  пл.  $CDE$ , что и требовалось доказать.



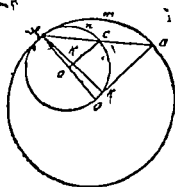
зад. 266.



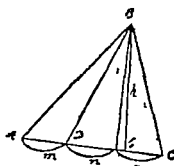
зад. 267.

267. Предположимъ, что стороны  $\triangle DZM =$  медианъ  $\triangle ABC$ . Продолжимъ медиану  $AE$  до пересѣченія съ линіей  $BK$ , параллельною  $OC$ , тогда  $\triangle BEK = \triangle OEC$ , такъ какъ  $BE = EC$  и углы соответственно равны; почему  $\triangle BEK + \triangle BEO = \triangle OEC + \triangle BEO$  или  $\triangle OBK = \triangle OBC$ . Такимъ же образомъ докажемъ, что  $\triangle FBO = \triangle ABC$  и  $\triangle AON = \triangle AOC$ . Но  $\triangle OBK$ ,  $\triangle FBO$  и  $\triangle AON$  равны, такъ какъ стороны ихъ равны  $\frac{2}{3}$  каждой изъ медианъ  $\triangle ABC$ , следовательно  $\triangle ABC = 3 \triangle OBK$ . Рассматривая треугольники  $DZM$  и  $OBK$ , мы видимъ, что стороны ихъ пропорціональны, такъ какъ  $BK = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3}ZD$ ,  $OB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}ZM$ ,  $OK = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}DM$ , почему эти треугольники подобны, вследствие чего  $\triangle DZM : \triangle OBK = ZM^2 : OB^2 = ZM^2 : (\frac{2}{3}ZM)^2 = 9 : 4$  или  $\triangle DZM : 3 \triangle OBK = 3 : 4$ , или  $\triangle DZM : \triangle ABC = 3 : 4$ , что и требовалось доказать.

268. Такъ какъ окружность  $O_1$  есть, какъ известно, геометрическое мѣсто серединъ всѣхъ хордъ, исходящихъ изъ точки  $A$ , то  $C$  есть середина хорды  $AB$ , и  $AC=CB$ ; слѣд.,  $\frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_1C} = \frac{AB}{AC} = 2$ , и  $\triangle ACO_1$  подобенъ  $\triangle ABO$ ; на основании § 299. Геом. Киселева имѣемъ, что площадь сегмента  $AmB = [\frac{1}{2}R(S-AC)] = \frac{1}{2}OB(\angle AmB - \angle AK)$ , а площадь сегмента  $AnC = \frac{1}{2}O_1C(\angle AnC - \angle AK_1)$ ; такъ  $\triangle ACO_1$  подобенъ  $\triangle ABO$ , то  $\angle AO_1C = \angle AOB$  и  $AmB:AnC = OB:O_1C = 2:1$ , и  $AK:AK_1 = 2:1$ ; слѣд., площ. сегмента  $AmB$ : площ. сегмента  $AnC = \frac{1}{2}OB(AmB - \angle AK) : \frac{1}{2}O_1C(AnC - \angle AK_1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot O_1C(2 \cdot AnC - 2 \angle AK_1) : \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot O_1C(AnC - \angle AK_1) = 4:1$ .



зад. 268.



зад. 275.

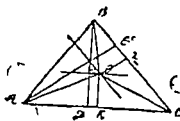
275. По условію  $ABD : DBE : EBC = m : n : p$ ; такъ какъ площади  $\triangle$ -овъ, имѣющихъ одну и ту же высоту, въ данномъ случаѣ  $h$ , относятся, какъ основанія, то  $ABD : DBE : EBC = AD : DE : EC$  и такимъ образомъ мы имѣемъ  $AD : DE : EC = m : n : p$ , т. е. для нахождения искомымъ линій  $BD$ ,  $BE$ , надо раздѣлить основаніе  $\triangle$ -ка  $ABC$ , т. е. линію  $AC$  въ отношеніи  $m : n : p$ .

276. Такъ какъ  $\triangle AOC \propto \triangle BOC \propto \triangle BOA$ , то  $\triangle ABC \propto 3\triangle AOC$ ;  $\triangle$ -ка  $ABC$  и  $AOC$  имѣютъ общее основаніе  $AC$ , а потому  $BD : OK = 3 : 1$ , и  $OK = \frac{BD}{3}$ ; точно также, находимъ, что

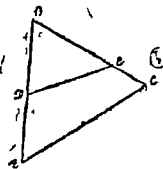
$\frac{AE}{OZ} = 3:1$ , и  $OZ = \frac{AE}{3}$ ; слѣдовательно, искомая точка  $O$  находится на пересѣченіи двухъ параллельныхъ линій, проходящихъ въ разстояніи,  $OK = \frac{BD}{3}$  и  $OZ = \frac{AE}{3}$  отъ сторонъ  $AC$  и  $BC$ .

277. Эти 2 №№ 276, 277 по ошибкѣ перемѣщены.  $\triangle DBE$  (точка  $D$  дана, а  $E$  надо найти)  $= \frac{1}{2} \triangle ABC$ ; слѣд., такъ  $\triangle$ -ки  $ABC$  и  $DBE$  имѣютъ общій уголъ  $B$ , то  $\frac{\triangle ABC}{\triangle DBE} = \frac{AB \cdot BC}{BD \cdot BE} = \frac{2}{1}$ ; отсюда

имеем  $AB \cdot BC = 2BD \cdot BE$ , и  $BE : BC = AB : 2BD$ , т. е. исконая  $BE$  есть четвертая пропорциональная къ линиямъ  $BC$ ,  $AB$ ,  $2BD$  — ее легко построить.

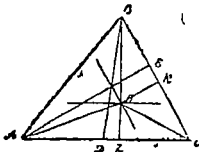


зад. 276.

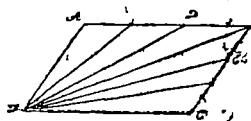


зад. 277.

278.  $\triangle AOC : \triangle BOC : \triangle BOA = 2 : 3 : 4$ ; на основании произвольныхъ пропорцій пишемъ  $(\triangle AOC + \triangle BOC + \triangle BOA) : \triangle AOC = (2+3+4) : 2$ , или  $\triangle ABC : \triangle AOC = 9 : 2$ ; т. к.  $\triangle$ -ки  $ABC$  и  $AOC$  имѣютъ общую сторону  $AC$ , то имѣетъ право писать:  $BD : OZ = 9 : 2$ , и  $OZ = \frac{2}{9}BD$ ; точно такъ же, изъ рассмотрѣнныя  $\triangle$ -овъ  $ABC$  и  $BOC$ , находимъ:  $OK = \frac{3}{9}AE = \frac{1}{3}AE$ ; слѣдов., исконая точка находится на пересѣченіи двухъ параллельныхъ линий, проведенныхъ въ разстояніи  $OZ = \frac{2}{9}BD$  и  $OK = \frac{1}{3}AE$  отъ сторонъ  $AC$  и  $BC$ .



зад. 278.

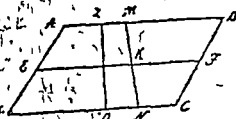


зад. 279.

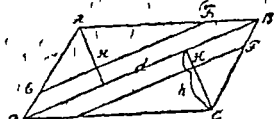
279. Раздѣлимъ сперва параллелограмъ диагональми, проходящими черезъ данную вершину, на два равныхъ треугольника и каждый изъ послѣднихъ раздѣлимъ на три равновеликія части. Для этого достаточно раздѣлить ихъ основанія на три равныя части и точки дѣленія соединить съ вершиной  $D$ . Всѣ шесть получившихся такимъ образомъ  $\triangle$ -овъ будутъ равновелики; въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ  $\triangle$ -овъ, составляющихъ  $\triangle ABD$ , равенъ  $\frac{1}{3}$  послѣдняго, такъ какъ, обладая одинаковою съ нимъ высотой, имѣетъ основаніе  $= \frac{1}{3}AB$ ; точно также каждый изъ  $\triangle$ -овъ, составляющихъ  $\triangle DBC$  равенъ  $\frac{1}{3}$  послѣдняго; но такъ какъ  $\triangle$ -ки  $DBC$  и  $DAV$  равны, то и всѣ 6 малыхъ  $\triangle$ -овъ равновелики. Поэтому, соединяя ихъ попарно, находимъ искомыя три равновеликія части параллелограмма.

280. Проведем среднюю линию EF; пусть искомая линия MN делит параллелограмм ABCD на части: AMND, MBCN, относящиеся, как  $m : n$ ; имеем:  $AMND : MBCN = m : n = \frac{(AM + DN)}{2}$

ЗО:  $\frac{(MB + NC)}{2}$  ЗО = EK : KF =  $m : n$ ; отсюда заключаем, что для нахождения искомой точки К, надо среднюю линию EF делить в отношении  $m : n$  и провести через нее MN.



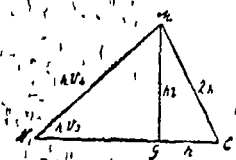
зад. 280.



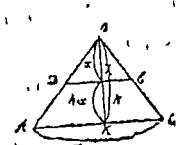
зад. 281.

281. Пусть делящая линия суть EF и E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>. в таком случае  $\triangle CEF = \frac{1}{3} \square ABCD$  или  $\triangle CFF = \frac{2}{3} \triangle CDB$ , т. к. диагональ делит параллелограмм на два равных  $\triangle$ -ка. В таком случае  $\frac{EF \cdot CH}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{d \cdot h}{2}$  или EF: CH =  $\frac{2}{3} d : h$ ; кроме того, CH : h = EF : d. Изъ

этих двух соотношений находим  $CH = h \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} h \sqrt{6}$ . CH легко найти графически, построив сперва прямоугольный GCM; у которого катет GC = h, а гипотенуза CM = 2h тогда другой катет GM =  $h\sqrt{3}$ ; построив затѣмъ прямоугольный  $\triangle GMN$ , оба катета которого равны  $h\sqrt{3}$ , видимъ, что гипотенуза MN =  $h\sqrt{6}$ . Итакъ отложивъ по перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ вершинъ A и C на диагональ DB, отрезки AN' = CH =  $\frac{1}{3} h \sqrt{6}$ , получимъ точки N, H, чрезъ которыя проходятъ искомыя прямыя.



зад. 281.

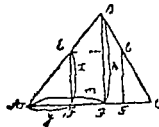


зад. 282.

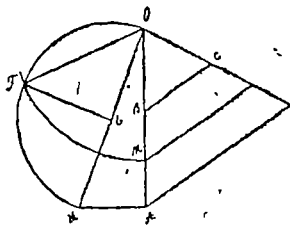
282. Пусть  $\triangle ABC : \triangle DBE = \triangle DBC : \square ADEC$ ; в таком случае имеем:  $\frac{a \cdot h}{2} : \frac{BE \cdot x}{2} = \frac{DE \cdot x}{2} : \frac{(DE+a)(h-x)}{2}$ ; откуда  $a \cdot h(DE+a)(h-x) = DE^2 \cdot x^2$ ; кроме того,  $a : DE = h : x$ , и  $DE = \frac{a \cdot x}{h}$ ; исключив  $DE$ , получим  $a \cdot h \left( \frac{a \cdot x}{h} + a \right) (h-x) = \frac{a^2 x^2}{h^2} \cdot x^2$ , или  $h^2 - x^2 = \frac{x^4}{h^2}$ , что приводит к решению биквадратного уравнения и даёт  $x = h \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ; если мы это напишем:  $x = \sqrt{h \cdot \left( h \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}$ , то увидим, что  $BZ = x$  есть средняя пропорциональная между  $BK = h$  и  $h \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  = сторонам десятиугольника, в круг, радиус которого  $h$ .

283. Пусть  $EF$  и  $E'F'$  искомая линии; в таком случае,  $\triangle AEF = \frac{\triangle ABC}{3}$  или  $\frac{xy}{2} = \frac{a \cdot h}{3 \cdot 2}$ , или  $xy = \frac{a \cdot h}{3}$ ; кроме того, имеем:  $h : x = AD : y$ , или:  $h : x = m : y$ ; исключив  $x$  получим:  $y \cdot \frac{hy}{m} = \frac{a \cdot h}{3}$  или  $y^2 = \frac{a}{3} \cdot m$ ;  $y$ , т. е. отрезок  $AF$  легко найти, как среднюю пропорциональную к  $\frac{a}{3}$  и  $m$ , т. е. к  $\frac{AC}{3}$  и  $AD$ ; точно также можно найти отрезок  $F_1C$ .

284.  $\frac{\pi R^2}{2} = \pi r^2$  или  $\frac{R^2}{2} = r^2$ , откуда  $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ , т. е. радиус  $r$  равен половине стороны квадрата, вписанного в круг радиуса  $R$ .



зад. 283.



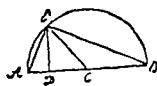
зад. 285.

285. Предположим, что прямая MN делит трапецию ABCD пополам, т. е. что площадь MBCN: площ. ABCD = 1 : 2. Продолжим непараллельные стороны до взаимного пересечения в точке O, возьмем за неизвестную величину расстояние конца M искомого линии MN до вершины треугольника O и определим MO. Так как  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OMN$  и  $\triangle OAD$  подобны, то пл.  $\frac{\triangle OAD}{\triangle OBC} = \frac{OA^2}{OB^2}$  и  $\frac{\text{пл. } \triangle OMN}{\text{пл. } \triangle OBC} = \frac{OM^2}{OB^2}$ . Из этих пропорций имеем  $\frac{\text{пл. } \triangle OAD - \text{пл. } \triangle OBC}{\text{пл. } \triangle OBC} = \frac{OA^2 - OB^2}{OB^2}$  или  $\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } \triangle OBC} = \frac{OM^2 - OB^2}{OB^2}$ . Разделим одну порцию на другую, получим  $\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } MBCN} = \frac{OA^2 - OB^2}{OM^2 - OB^2}$  или  $\frac{OA^2 - OB^2}{OM^2 - OB^2} = 2$ , откуда  $OM = \sqrt{1/2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{1/2 m^2}$ , где  $m^2 = OA^2 + OB^2$ . Чтобы построить OM, восстанавливаем  $\perp AH = OB$ ; получим  $OH = m$ , затем из точки E середины OH восстанавливаем  $\perp EF$  до пересечения ее с окружностью, которой  $2r = OH$ , и получаем  $OF = OM$ . Из точки O радиусом OF опишем дугу до пересечения ее с  $AO$  в точке M, затем, правая  $MN \parallel AD$ ; получим искомого линию.

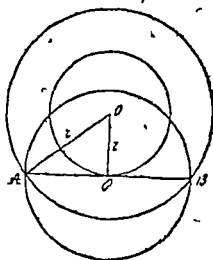
287. Положим, что AMNC данный квадрат, которого площадь для краткости означим чрез  $k^2$ . Проведем AN, и взяв B, так чтобы  $AB = BN$ , найдем, что  $2AB^2 = AC^2 = k^2$ ; откуда  $AB^2 = \frac{k^2}{2}$ . Далее, приняв B' за середину AB и проведя  $BD \perp AC$ , заметим, что  $2B'A^2 = DA^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{4}$ , откуда  $B'A^2 = \frac{k^2}{8}$ . Взяв на продолжении BD часть  $DF = DB' = B'A$ , получим, что  $FA^2 = DF^2 + DA^2 = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{4} = \frac{3}{8}k^2$ .

288. Пусть будет S данная сумма и  $q^2$  данный квадрат. Над  $AB = s$  описываем полуокружность и восстанавливаем перпендикуляр  $ED = q$ , тогда AD и DB будут сторонами искомого прямоугольника, потому что  $AD \cdot BD = ED^2 = q^2$ . Пусть будет d — данная разность,  $q^2$  — данный квадрат. Проведем прямую AB и восстановив к ней  $\perp DE = q$ , берем  $DC = \frac{d}{2}$  и описываем из центра C радиусом CE полуокружность, тогда AD и DB будут стороны

искомаго прямоугольника. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ  $AD \cdot BD = DE^2 = q^2$  и кроме того  $DB - AD = AC + DC - AD = 2DC = d$ .



зад. 288



зад. 289.

**289.** Обозначимъ радиусъ искомага круга чрезъ  $x$ , тогда площадь его  $\pi x^2$  должна быть  $= \pi r^2 - \pi r_1^2$ , т. е. равности между площадью большого круга радиуса  $r$  и меньшаго радиуса  $r_1$ ; сокращая равенство  $\pi x^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2$  на  $\pi$ , получимъ, что  $x^2 = r^2 - r_1^2$ , откуда  $x = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ . Зная  $x$ , мы можемъ построить искомый кругъ. Но, проведя какую нибудь касательную къ меньшему концентрическому кругу, мы видимъ, что  $AO'^2 = AO^2 - OO'^2$ ,  $AO_1^2 = r^2 - r_1^2$ , откуда  $AO' = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ , но и  $x = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ , следовательно,  $AO'$  и есть радиусъ искомага круга. Дѣйствиительно,  $AO_1^2 = r^2 - r_1^2$ , умножая на  $\pi$ , получимъ  $\pi AO_1^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2$ , и такъ, чтобы рѣшить эту задачу стоить только провести касательную къ меньшему концентрическому кругу до пересѣченія ея съ большимъ кругомъ въ  $A$  и  $B$ , тогда  $AB$  будетъ диаметрѣ искомага круга, ибо  $AO' = \frac{AB}{2}$ .

**291.** Данъ  $\Delta$ , котораго основаніе  $b$  и высота  $h$ ; требуется превратить его въ равновеликій равносторонній. Предположимъ, что основаніе искомага  $\Delta$  будетъ  $x$ , а высота  $y$ , то по условію  $\frac{xy}{2} = \frac{bh}{2}$  или  $xy = bh$ , и  $y = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$  или  $x = \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}y\sqrt{3}$ , следовательно,  $xy = \frac{2}{3}y^2\sqrt{3}$ , а такъ какъ  $xy = bh$ , то  $\frac{2y^2}{\sqrt{3}} = bh$  или  $h : y = y : \frac{b}{2\sqrt{3}}$  (гдѣ  $\frac{b}{2\sqrt{3}}$  есть высота равносторонняго  $\Delta$  на съ основаніемъ  $b$ ). Итакъ, высота искомага  $\Delta$  = средней геометрической

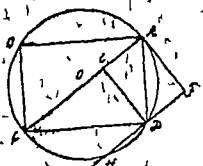


между высотой данного  $\triangle$  и высотой равностороннего  $\triangle$ , коего основание  $b$ . Основание  $x$  искомого  $\triangle$  находимъ изъ выражения  $xu = bh$  или  $x : b = h : u$ . т. е.  $x$  есть 4-я пропорциональная обѣихъ высотъ и основанія данного  $\triangle$ -ка.

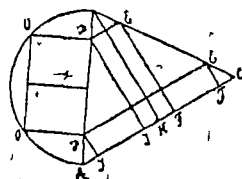
292. Положимъ, что задача рѣшена и что въ данный кругъ вписанъ прямоугольникъ ABCD, площадь котораго  $m^2$ . Для рѣшенія задачи мы должны найти сторону AD или сторону DC или высоту DE. Пусть  $DE = x$ , тогда пл. ABCD = 2пл.  $\triangle ACD = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot$

$DE = d \cdot x$ . Но пл. ABCD =  $m^2$ , почему  $d \cdot x = m^2$ , откуда  $x = \frac{m^2}{d}$

Итакъ,  $x$  найдемъ, какъ 4-ю пропорциональную. Чтобы построить искомый прямоугольникъ, проведемъ въ данномъ кругѣ диаметръ AC, возставимъ  $\perp AF$  и отложимъ на немъ  $x$ . Затѣмъ проведемъ  $FH \parallel AC$ , получимъ точку D. Соединивъ D съ A и C и проведя  $AB \parallel DC$  и сторону BC находимъ прямоугольникъ.



зад. 292.



зад. 293.

293. Пусть JDEF будетъ прямоугольникъ, равновеликий данному квадрату  $m^2$ , изъ подобныхъ  $\triangle \triangle ADJ$  и AVH выводимъ, что

$\frac{DJ}{BH} = \frac{AD}{AB}$ . изъ подобныхъ  $\triangle \triangle DBE$  и ABC имѣемъ также

$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}$ . Помножая почленно оба равенства находимъ  $\frac{DJ \cdot DE}{BH \cdot AC} =$

$\frac{AD \cdot BD}{AB^2}$  или  $\frac{m^2}{BH \cdot AC} = \frac{AD \cdot BD}{AB^2}$ , или же  $AD \cdot BD = \frac{m^2 \cdot AB^2}{BH \cdot AC}$ .

Принимая  $AD \cdot BD = x^2$  и  $BH \cdot AC = l^2$ , находимъ,  $x^2 = \frac{m^2 \cdot AB^2}{l^2}$ ,

откуда  $x = \frac{m \cdot AB}{l}$ . Незавѣстное  $x$  определить легко, ибо это чет-

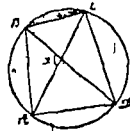
вертая пропорциональная къ прямымъ  $l$ ,  $m$  и AB. Описываютъ на AB, какъ на диаметрѣ, полуокружность AOB, затѣмъ на разстояніе  $x$  отъ AB проводятъ къ этой линіи параллельную, которая опредѣ-

лать точку  $O$  пересечением своимъ съ полуокружностью  $OAB$ . Изъ этой точки  $O$  опускаютъ на линію  $AB \perp OD$ ; наконецъ чрезъ точку  $D$  проводятъ линію  $DE$ , параллельную  $AC$ , и перпендикуляръ  $EF$ .

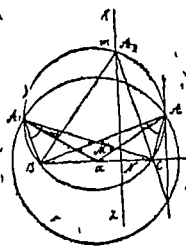
*Примѣчаніе.* Обыкновенно бываютъ два рѣшенія:  $JDEF$  и  $J'D'E'F'$ , ибо  $x^2 = OD^2 = O'D'^2 = AD \cdot BD = AD' \cdot BD'$ , но если  $x = \frac{AB}{2}$ , то получается только одно рѣшеніе; наконецъ, задача стано-

вится невозможною при  $x > \frac{AB}{2}$ .

**367.** Сначала строимъ  $\triangle ABC$  по тремъ сторонамъ:  $AB, BC, AC$ ; описываемъ около  $\triangle$ -ка  $ABC$  окружность, затѣмъ изъ точки  $B$  проводимъ  $BD$  подъ даннымъ угломъ  $\alpha$  къ  $AC$ , находимъ, такъ, образъ точки  $D$  и получаемъ искомый  $\square ABCD$ .



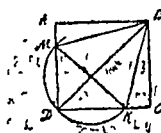
зад. 367.



зад. 368.

**368.** Строимъ на данной сторонѣ  $BC$  сегментъ  $BmC$ , вмѣщающій данный  $\angle A$ ; затѣмъ, т. к.  $AB^2 + AC^2 = K^2$ , то находимъ:  $AM^2 = K^2 - \frac{a^2}{4}$  (см. геом. Киселева § 212), откуда  $AM = \sqrt{K^2 - \frac{a^2}{4}}$ , алгебраическимъ методомъ находимъ  $AM$  и описываемъ окружность изъ точки  $M$  радиусомъ  $AM$ ; въ пересѣченіи двѣ точки  $A$  и  $A_1$ ; два рѣшенія; точно также поступаемъ въ случаѣ, если дано  $A_2B^2 - A_2C^2 = K^2$ ; или же преобразуя:  $A_2B^2 = A_2N^2 + BN^2$ ,  $A_2C^2 = A_2N^2 + CN^2$ , откуда  $A_2B^2 - A_2C^2 = A_2N^2 + BN^2 - A_2N^2 - CN^2 = (BN + CN)(BN - CN) = K^2$  откуда получаемъ:  $BN - CN = \frac{K^2}{a}$  и  $BN + CN = a$ ; найди отсюда  $BN$  и  $CN$ , построимъ въ точкѣ  $N$   $KZ \perp BC$  ( $KZ$  геометрич. мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній которыхъ отъ  $B$  и  $C$  равно  $K^2$ ), находимъ  $A_2$  и  $\triangle A_2BC$  найденъ.

369. Пусть данъ равностор.  $\triangle MBK$ , описать квадратъ  $ABCD$ , т. к.  $\triangle ABM \cong \triangle BCK$  (гипот.  $BM = BK$ , и  $\angle ABM = \angle BCK$ ), то  $AM = CK$ , и  $AD = AM = DC = CK$ , отсюда  $MD = BK$ , т. к.  $\angle D = \angle B$ , то точку  $D$  легко найти, описавъ на  $MK$ , какъ на диаметрѣ, полуокружность и проведя  $BD \perp MK$ , найдемъ въ пересѣченіи  $D$ ; теперь, чрезъ  $D$ , и  $M$ , или  $K$  проведемъ линіи, и изъ  $B$  опускаемъ на нихъ перпендикуляры  $BA$ ,  $BC$ , находимъ искомый квадратъ.



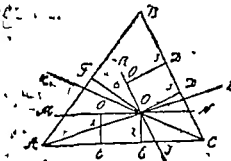
зад. 369.



зад. 370.

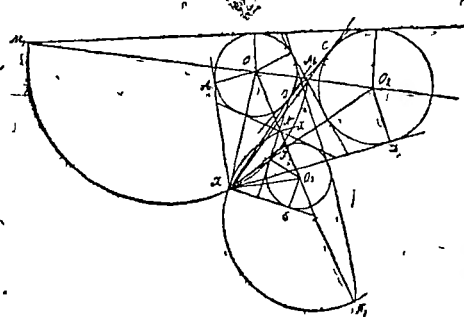
370. Пусть  $M$  искомая точка; въ такомъ случаѣ, на основаніи § 199 геом. Киселева, изъ  $\triangle AMC$  имѣемъ:  $MA : MC = AB : BC$  и на основаніи § 200 (тамъ же) имѣемъ, что  $M$  лежитъ на окружности, описанной на  $EB_1$ , какъ на диаметрѣ, точно также, изъ  $\triangle BMD$  имѣемъ:  $MB : MD = BC : CD$ , и точка  $M$  на основаніи § 200 лежитъ на окружности, построенной на  $CC_1$ , какъ на диаметрѣ, точка пересѣченія есть искомая  $M$ .

371. Выбираемъ произвольную единицу измѣренія, и строимъ на сторонахъ  $CA$  и  $CB$  перпендикуляры  $O_1E_1$  и  $O_1D_1$ , соответственно равные 2 и 3 произвольно выбраннымъ единицамъ, проводимъ линіи  $MN$  и  $RS$  соответственно параллельныя сторонамъ  $AC$  и  $CB$  въ разстояніяхъ 2 и 3; чрезъ ихъ пересѣченіе  $O$  проводимъ  $SK$ ; точно также находимъ  $AZ$ , разстоянія которой отъ сторонъ  $AC$  и  $AB$  отвѣсятся, какъ 2 : 6; въ пересѣченіи  $SK$  и  $AZ$  находимъ искомую точку  $O$ .



373. Пусть  $X$  будетъ искомая точка; въ такомъ случаѣ  $\angle AXC = \angle CXD = \angle FXE$ ;  $\angle AXO_1 = \angle DXO_2$  и  $\triangle AXO_1$  подобенъ  $\triangle XO_2D$ , отсюда слѣдуетъ, что  $\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{O_2D}{O_1A} = \frac{R_2}{R_1}$ ; на основаніи § 200

геом. Киселева, точка  $X$  должна лежать на окружности, построенной на  $MM_1$ , как на диаметр; точно также найдем, что точка  $X$  должна лежать на окружности, построенной на  $NN_1$ , как на диаметр; искомая точка находится на пересечении этих двух геометрических мест; два решения  $X$  и  $X_1$ .



*1-е Примѣчаніе.* Пусть  $ABCD$  будетъ какая нибудь трапеція, въ которой прямая  $EE'$  соединяетъ середины непараллельныхъ сторонъ, а  $GD'$  есть отрѣзокъ, захватываемый на линіи  $EE'$  діагоналями трапеціи. Какъ извѣстно имѣемъ:  $EE' = \frac{1}{2}(AB + CD)$  или  $EG + GD' + D'E' = \frac{1}{2}(AB + CD)$ . Но  $EG = D'E' = \frac{1}{2}CD$ , следовательно, но  $EG + D'E' = CD$ ; и потому, подставивъ  $CD$  вмѣсто  $EG + D'E'$  и потомъ перенося  $CD$  во вторую часть равенства, находимъ:  $GD' = \frac{1}{2}(AB - CD)$ , т. е. отрѣзокъ, захватываемый діагоналями трапеціи на прямой, соединяющей середины ея непараллельныхъ, равенъ полуразности ея оснований.

*2-е Примѣчаніе.* Если возставить перпендикуляръ къ срединѣ линіи  $DC'$  и продолжить его до  $A'$ , до пересѣченія съ  $BD$ , потомъ провести  $A'C'$ , то увидимому треугольникъ  $A'BC'$  отвѣчаетъ другому рѣшенію, ибо въ треугольникѣ  $D'AC'$ , какъ въ равнобедренномъ, уголъ  $BA'C' =$  данному  $\angle A$ ;  $BC' = BC$  и  $BA' + A'C' = BD = AB + AC$ . Стало быть, треугольникъ  $BA'C'$  отвѣчаетъ вопросу. Но  $\triangle BA'C' \neq BAC$ , ибо  $A = A'$ ,  $BC' = BC$  и  $A'BC' = ACB$ , ибо  $ACB = 2d - D - BCD$ , а также  $DVC'$  или  $A'BC' = 2d - D - BCD$ ; стало быть, въ сущности есть только одно рѣшеніе.